



مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

از اردوش تا کی‌یف

تألیف راس هانسبرگر

ترجمه علی ساوجی



با رونق گرفتن مسابقات ریاضی داخلی و بین المللی هر سال بر تعداد علاقه مندان به شرکت در این مسابقات افزوده می شود که برگزاری آنها نقش مهمی در پیشرفت آموزش کشور دارد و نیاز به کتابهای جدید و اسلوبمندی را طلب می کند .

کتاب **From Erdös to Kiev** یکی از کتابهایی است که مؤلف آن بر روشهای اساسی حل مسائل و بیان روشن و بدون استفاده از تکنیکهای پیچیده تبحری بسزا دارد .

در این کتاب راه حل مسأله های بسیاری که در المپیادهای ملی کشورهای مختلف و المپیادهای بین المللی ، از شاخه های گوناگون ریاضیات مقدماتی از جمله هندسه ، نظریه اعداد ، احتمالات و ترکیبیات ، مطرح شده اند تشریح شده است تا داوطلبان شرکت در این المپیادها آمادگی لازم را پیدا کنند .

ترجمه فارسی این کتاب که با عنوان **از اردوش تا کی یف** انتشار یافته است برای دانش آموزان علاقه مند به شرکت در مسابقات ریاضی در سطح المپیادهای ریاضی ، دبیران ، دانشجویان و سایر علاقه مندان مفید خواهد بود .



مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

امید علی کرمزاده
عضو هیأت علمی دانشگاه شهید چمران (اهواز)
عضو کمیته ملی المپیاد ریاضی

زیر نظر :
یحیی تابش
عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف
عضو کمیته ملی المپیاد ریاضی

از کتابهای این مجموعه

کتابهای زرد

نظریه اعداد

هندسه

جبر

آنالیز

ترکیبیات

هنرمسأله حل کردن

کتابهای نارنجی

هندسه مسطحه

پانصد مسأله ریاضی پیکارجو

از اردوش تا کی یف

دایره ها

فنون مسأله حل کردن

محافل ریاضی

مباحثی از هندسه

کتابهای قرمز

حل مسأله از طریق مسأله

برگزیده مسأله های جبر و آنالیز

المپیادهای ریاضی چین

شیوه های مسأله حل کردن



از اردویش تا کی یف

تألیف راس هانسبرگر

ترجمه علی ساوجی

From Erdős To Kiev
Problems of Olympiad Caliber
Ross Honsberger
The Mathematical Association of America, 1996

از اردوش تا کی‌یف

مؤلف: راس هانسبرگر

مترجم: علی ساوجی

ویراستار: ارشک حمیدی

ناشر: مؤسسه فرهنگی فاطمی

چاپ دوم، ۱۳۸۱

شابک ۹۶۴-۳۱۸-۲۶۹-x

ISBN 964-318-269-x

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسه فرهنگی فاطمی

- مدیر تولید: فرید مصلحی

- طراح جلد: زهرا قورچیان

- حروفچینی و صفحه‌بندی (L^AT_EX): زهره امینی

- صفحه‌آرا: ساقی جهانشاهی قاجار

- نمونه‌خوان: فاطمه صادقی

- نظارت بر چاپ: علیرضا رضائزاد

چاپ و صحافی: چاپخانه حدیث

کلیه حقوق برای مؤسسه فرهنگی فاطمی محفوظ است.

مؤسسه فرهنگی فاطمی تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ - خیابان دکتر فاطمی، شماره ۱۵۹

تلفن: ۸۹۶۱۴۲۲ - ۸۹۶۴۷۷۰ - ۸۹۵۶۲۵۸

info@fatemi.ir



Honsberger, Ross

هانسبرگر، راس، ۱۹۲۹ -

از اردوش تا کی‌یف / مؤلف راس هانسبرگر؛ مترجم علی ساوجی؛ ویراستار ارشک حمیدی؛ زیر نظر یحیی تابش، امیدعلی کرمانده. - تهران: فاطمی، ۱۳۷۷.

ده، [۲۲۶] ص.: مصور.

ISBN 964-318-269-x

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

عنوان دیگر: مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی.

From Erdős to Kiev: Problems
of olympiad caliber.

عنوان اصلی:

کتابنامه: ص. ۲۲۳.

چاپ دوم: ۱۳۸۱

۱. المپیادها (ریاضیات). ۲. ریاضیات - مسائل، تمرینها و غیره. ۳. ریاضیات - مسابقه‌ها. ۴. ریاضیات - سرگرمیها. الف. ساوجی، علی، ۱۳۴۶ - مترجم. ب. عنوان. ج. عنوان: مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی.

۳۷۲/۲۳۸

LB۳۰۶۰/۲۴/۸۲/۳۷۷

۷۷-۱۵۲۶۷

کتابخانه ملی ایران

فهرست

هفت	آمادگی برای المپیاد ریاضی
نه	پیشگفتار
۱	هفت راه حل از جورج اواگلوپولس
۱۳	تجزیه مثلث
۱۸	آزمون ریاضیات دعوتی امریکا، ۱۹۸۷
۲۳	مسأله‌ای از آزمون ریاضیات دعوتی امریکا، ۱۹۹۱
۲۵	نه مسأله استفاده نشده از المپیاد بین‌المللی، ۱۹۸۷
۴۹	دو مسأله از المپیاد امریکا، ۱۹۸۸
۵۲	مسأله‌ای از المپیاد بین‌المللی، ۱۹۸۸
۵۵	مسأله زیبایی از هندسه از دوان دوتامیل
۵۸	مسأله‌ای از المپیاد کی‌یف
۶۲	چند مسأله مورد علاقه دانش‌آموزان
۷۰	چهار مسأله استفاده نشده از المپیاد بین‌المللی، ۱۹۸۸
۸۴	مسأله‌هایی از آزمون ریاضیات دعوتی امریکا، ۱۹۸۸
۸۹	مسأله استفاده نشده‌ای از بلغارستان درباره مثلث میانه‌ای و مثلث ژرگون
۹۲	دو راه حل از جان موروی از المپیاد دبیرستانی لنینگراد، ۱۹۸۲
۹۵	دو راه حل از اد دولیتل
۱۰۲	مسأله‌ای از المپیاد اسپانیا، ۱۹۸۷
۱۰۶	مسأله‌ای از یوهان والتر

- مسئله‌ای از المپیاد بالکان، ۱۹۸۷
- ۱۰۹
- مسئله‌ای از دوره‌های مختلف مسابقات کورشاک
- ۱۱۲
- دو مسئله از مسابقه ملی ریاضیات دوره راهنمایی جمهوری خلق چین، ۱۹۸۶
- ۱۲۶
- مسئله‌ای از المپیاد اسپانیا، ۱۹۸۶
- ۱۲۹
- ترسیمی هندسی
- ۱۳۱
- نابرابری شامل لگاریتم
- ۱۳۴
- مسئله‌ای درباره مثلثهای پای قائم الزاویه متساوی الساقین
- ۱۳۶
- دو مسئله از المپیاد اتریش، ۱۹۸۷
- ۱۴۱
- مسئله‌ای از المپیاد کانادا، ۱۹۸۸ (با کمی اصلاح)
- ۱۴۸
- مسئله‌ای درباره مجموعه‌های بسته
- ۱۵۱
- مسئله‌ای از مسابقات تیمی اتریش - لهستان، ۱۹۸۷
- ۱۵۳
- دو مسئله از مسابقات ریاضی اتریش - لهستان، ۱۹۸۷
- ۱۵۶
- ویژگی جالبی از دایره محاطی مثلث
- ۱۶۱
- مسئله‌ای درباره سقفها و کفها
- ۱۶۴
- دو مسئله از المپیاد بین‌المللی، ۱۹۸۷
- ۱۶۸
- مسئله‌ای درباره تصاعدهای حسابی
- ۱۷۲
- از ویژگیهای مثلثهایی که زاویه‌ای ۳۰° دارند
- ۱۷۴
- مسئله‌ای از مسابقات بهاری بلغارستان (کلاس ۱۱)، ۱۹۸۵
- ۱۷۷
- مسئله‌ای استفاده نشده از المپیاد بین‌المللی؛ از انگلستان
- ۱۸۰
- مسئله‌ای از المپیاد رومانی
- ۱۸۲
- مسئله‌ای از المپیاد بلغارستان، ۱۹۸۴
- ۱۸۴
- دو مسئله از اردوش
- ۱۸۶
- مسئله‌ای از المپیاد بلغارستان، ۱۹۸۵
- ۱۹۰
- مسئله‌ای از مسابقه‌های چین
- ۱۹۳
- مسئله‌ای هندسی از معابد ژاپنی
- ۱۹۵
- دو مسئله از دومین المپیاد بالکان، ۱۹۸۵
- ۲۰۰
- از ویژگیهای مثلثهای پایی
- ۲۰۶
- سه راه حل دیگر از جورج اواگلوبولس
- ۲۱۰
- نابرابری میانگین توانی
- ۲۱۹
- نمایه موضوعی
- ۲۲۴

آمادگی برای المپیاد ریاضی

تلاشهای گسترده‌ای که در سالهای اخیر برای بهبود وضعیت آموزش ریاضیات در سطوح مختلف صورت گرفته است دو هدف عمده پیش روی خود دارد: عمومی کردن ریاضیات و تربیت نخبگان. هدف اول از این رو اهمیت دارد که در آستانه قرن بیست و یکم میلادی «سواد ریاضی» ضرورتی عام پیدا کرده است، و هدف دوم نیز از هدفهای ارزشمند جوامع مدنی است. لذا کاملاً ضروری است که در پی دست یافتن به پیشرفتهای بیشتری در این باره باشیم و ابزارهای جدیدی برای شناسایی و پرورش استعدادهای بالقوه جامعه خود جستجو کنیم.

آموزشهای رسمی با توجه به گستردگی پهنه عملکرد، معمولاً میانگین دانش‌آموزان را از نظر علاقه و استعدادهای ویژه مخاطب خود قرار داده است. از این رو برای پرورش استعدادها و شکوفایی خلاقیتها، آموزشهای جانبی و غیررسمی و برنامه‌هایی نظیر المپیاد ریاضی اهمیت ویژه‌ای دارد. اگر به تاریخ نگاهی بیفکنیم سال ۱۸۹۴ شاید نقطه آغاز مسابقات علمی در عصر جدید باشد. در این سال مسابقه اتووش به نام بارون لوراند اتووش^۱ به صورت مسابقه ریاضی دانش‌آموزی در مجارستان شروع شد. مسائل این مسابقه به دلیل سادگی مفاهیم به کار گرفته شده هنوز هم جذاب است. پس از آن، طی سالها، مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان شکل گرفت و جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد تا اینکه در سال ۱۹۵۹ رومانی پیشگام راه‌اندازی المپیاد بین‌المللی ریاضی شد و از ۷ کشور اروپای شرقی برای شرکت در این المپیاد دعوت کرد و اولین المپیاد از ۲۰ تا ۳۰ ژوئیه ۱۹۵۹ در بخارست برگزار شد. کم‌کم کشورهای دیگری نیز به المپیاد بین‌المللی پیوستند و در حال حاضر این مسابقه، که هر سال در یک کشور برگزار می‌شود، معتبرترین مسابقه بین‌المللی دانش‌آموزی است.

مسابقات دانش‌آموزی در کشور ما نیز رفته رفته جایگاه ویژه‌ای یافته است؛ اولین مسابقه ریاضی دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیده سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در

1. Baron Loránd Eötvös

سال ۱۳۶۶ تیمی از کشورمان به المپیاد بین‌المللی اعزام گردید. پس از آن دانش‌آموزان زیادی در سرتاسر کشور مشتاقانه به این رقابت روی آوردند.

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه حل مسأله‌ای با ارزش به‌ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید؛ بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. تلاشی که ذهنهای شاداب و جوان برای انجام آن تمایل بسیاری دارند.

بدیهی است که اگر این تلاشها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادها و خلاق می‌انجامد. از این رو مؤسسه انتشارات فاطمی به انتشار مجموعه آمادگی برای المپیاد ریاضی اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دسته اول (کتابهای زرد) شامل کتابهایی مقدماتی با پیشنیاز ریاضی ۲ نظام جدید در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریه اعداد، آنالیز و جبر است.

دسته دوم (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای پیشرفته‌تر و مجموعه مسائل و کتابهای کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است، و بالاخره

دسته سوم (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته درباره المپیاد ریاضی است.

مجموعه آمادگی برای المپیاد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همه چالشگرانی که در ریاضیات زیباشناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوریهای ذهنی تلاش می‌کنند.

کتاب حاضر از دسته دوم و شامل مسأله‌هایی است که در المپیادهای ملی کشورهای مختلف و یا در المپیادهای بین‌المللی مطرح شده‌اند. بیشتر مسأله‌های کتاب از مباحثی چون هندسه، احتمالات، ترکیبیات و نظریه اعداد انتخاب و همه آنها حل شده‌اند. مطالعه این کتاب به دانش‌آموزانی که علاقه‌مند به شرکت در مسابقاتی از نوع المپیادهای ریاضی هستند، دبیران، دانشجویان و سایر علاقه‌مندان توصیه می‌شود.

پیشگفتار

بی‌تردید از برگزاری مسابقه‌های کوچک دوستانه بهره‌ زیادی عاید جامعه جهانی می‌شود. با وجود این، در آزمونهای سطوح پیشرفته این وسوسه وجود دارد که ارزشهای زیباشناختی را در برابر توانایی مطلق در به‌دست آوردن نتیجه‌ها قربانی کنند. طی این سالها، با گرم‌تر شدن بازار مسابقات ریاضی منطقه‌ای، ملی و بین‌المللی، بسیاری از دانش‌آموزان جوان و توانا آنقدر مشتاق کسب تسلط بر تکنیکهای متعددی که بیم آن می‌رود که در نهایت این تکنیکها جزء عاداتهای ذهنی آنها شود و این امر به ناتوانی همیشگی آنها در درک زیبایی ریاضیات مقدماتی بینجامد. همواره این فکر در ذهنم بوده که خطر اصلی تحصیل در مقطع دکتری این است که مطالعات لازم برای کسب این عنوان، آنقدر فشرده، زیاد و طولانی‌مدت‌اند که این خطر اساسی وجود دارد که توانایی فرد در مطالعه به‌حدی تحلیل یابد که فقط بتواند «مطالب را ورق بزند». دوست دارم تصور کنم که مربیان تیمهای جوانانمان در مسابقات ریاضی هیچ‌گاه در یادآوری این مطلب به آنها کوتاهی نمی‌کنند که علت اصلی اینکه ریاضیدانهای بزرگ اینقدر سختکوش و پربار بوده‌اند شیفتگی بیش از اندازه آنها به مطلب موردنظرشان بوده است. برای هدایت‌کنندگان برنامه‌های آموزشی کار آسانی نیست که از ترویج این دیدگاه که ارزش هر ایده در فایده‌اش نهفته است ممانعت کنند. این روزها زیاد نمی‌شنویم که شخصی بعد از ظهر لذتبخشی را با مطالعه کتاب جالبی درباره ریاضیات گذرانده باشد. حتی ممکن است مسأله‌ای مقدماتی اما خوب، بسیار جذاب و راه‌حل ابتکاریش شدیداً هیجان‌انگیز باشد. اینها همان احساساتی هستند که امیدوارم مجموعه حاضر در خواننده‌اش ایجاد کند. مسائل این کتاب تا حدی دشوارند و با اینکه داوطلبان شرکت در المپیادها می‌توانند مطالبی از آنها بیاموزند، هدف اصلیم سهیم کردن خوانندگان معمولی در لذت بردن از زیباییهای ریاضیات مقدماتی است.

من با بیشتر مسائل این کتاب در بخشهای المپیاد دوره‌های ۱۹۸۷ و ۱۹۸۸ مجلهٔ کروکس ماتماتیکوروم^۱ که انجمن ریاضی کانادا آن را چاپ می‌کند برخورد کرده‌ام. این مجلهٔ ادواری در نوع خود بی‌نظیر و مایهٔ افتخار تمام کسانی است که در برتریش مؤثرند. اگرچه ممکن است بسیاری از راه‌حلهای من طی کردن روال عادی باشند، ولی بیش از نیمی از راه‌حلهای موجود در گردآیهٔ حاضر از ابداعات من است. هنگامی که راه‌حلی مربوط به شخصی دیگر است، ضمن کار نام او را ذکر کرده‌ام، ولی چون مطالب را به سلیقهٔ خودم نوشته‌ام، آنها هیچ‌گونه دخالتی در نقایص موجود در ارائهٔ مطالب ندارند.

راس هانسبرگر

هفت راه حل از جورج اوا گلوپولس

جورج اوا گلوپولس در حال حاضر (۱۹۹۵) وکیل دعاوی جنایی در آتن پایتخت یونان است. او شیفته ریاضیات است و در دوران دانشجویی اش، یعنی هنگامی که راه‌حلهای زیر را پیدا کرده است، بخش زیادی از اوقات فراغتش را صرف حل کردن مسأله‌های ریاضی می‌کرد. در اینجا نمونه‌ای از راه‌حلهای او را که در این سالها در مجله کروکس ماتماتیکوروم چاپ شده است می‌بینید.

هنوز هم جورج در ریاضیات فعال است و در حال حاضر ویراستار ارشد ویرایش یونانی مجله معتبر کوانتوم است.

۱. مسأله ۱

(این مسأله مربوط به المپیاد استرالیا در سال ۱۹۸۳ است. ک. کوپر از دانشگاه دولتی میسوری مرکزی و جان موروی از شهر دالاس در ایالت تگزاس هم آن را حل کرده‌اند [۱۹۸۵، ۷۱].)

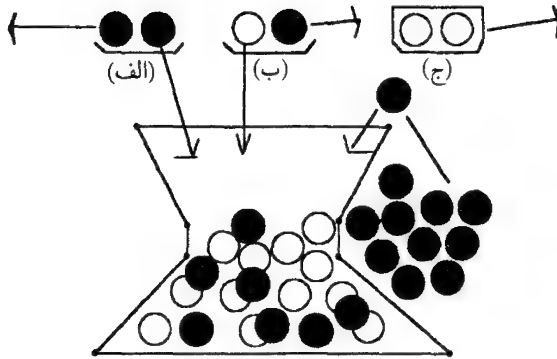
در ظرفی بزرگ ۷۵ توپ سفید و ۱۵۰ توپ سیاه وجود دارد و در کنار این ظرف توده انبوهی از توپهای سیاه قرار دارد. اینک عملیات دو مرحله‌ای زیر را به‌طور متوالی انجام می‌دهیم. ابتدا به تصادف دو توپ از ظرف بیرون می‌آوریم و سپس

الف) اگر هردو سیاه باشند، یکی را به ظرف برمی‌گردانیم و دیگری را کنار می‌گذاریم،

ب) اگر یکی سیاه و دیگری سفید باشد، توپ سفید را به ظرف برمی‌گردانیم و توپ سیاه را کنار می‌گذاریم،

ج) اگر هردو سفید باشند، هردو را کنار می‌گذاریم و یکی از توپهای سیاه توده کناری را درون ظرف می‌اندازیم.

بنابراین، در هر صورت، در هر مرحله دو توپ از ظرف خارج و تنها یک توپ به درون آن انداخته می‌شود و به این ترتیب تعداد توپهای موجود در ظرف یک واحد کاهش می‌یابد. پس در نهایت به وضعیتی می‌رسیم که تنها یک توپ در ظرف وجود دارد. سؤال این است که «رنگ آخرین توپ چیست؟»



شکل ۱

راه حل

به سادگی معلوم می شود که تعداد توپهای سیاه درون ظرف در هر مرحله همواره یک واحد تغییر می کند (این تعداد در (الف) و (ب) یکی کم و در (ج) یکی زیاد می شود). از آنجا که به طور قطع تعداد توپها به یک می رسد، سرانجام در مرحله ای تعداد توپهای سیاه باید به هریک از عددهای ۱۵۰، ۱۴۹، ۰۰۰، ۱ و یا حتی صفر برسد، اگرچه در اینکه این حالت روی دهد کمی تردید وجود دارد. این کشف کمک زیادی به حل مسأله نمی کند، زیرا نمی دانیم زمانی که تعداد توپهای سیاه به یک می رسد هنوز توپ سفیدی باقی مانده است یا خیر. با این حال، اگر به چگونگی تغییر تعداد توپهای سفید دقت کنیم، روش حل مسأله تا حدی روشن می شود. بد شد که از اول چنین چیزی را در نظر نگیریم.

در حالت های (الف) و (ب) تعداد توپهای سفید تغییر نمی کند و در حالت (ج) از این تعداد دو واحد کم می شود. بنابراین زوجیت تعداد توپهای سفید همواره یکسان است. از آنجا که این تعداد در ابتدا ۷۵، یعنی عددی فرد بوده، بنابراین در تمام مراحل نیز فرد باقی می ماند و این نتیجه ما را مطمئن می سازد که باید همواره دست کم یک توپ سفید در ظرف وجود داشته باشد. پس آخرین توپ الزاماً سفید است.

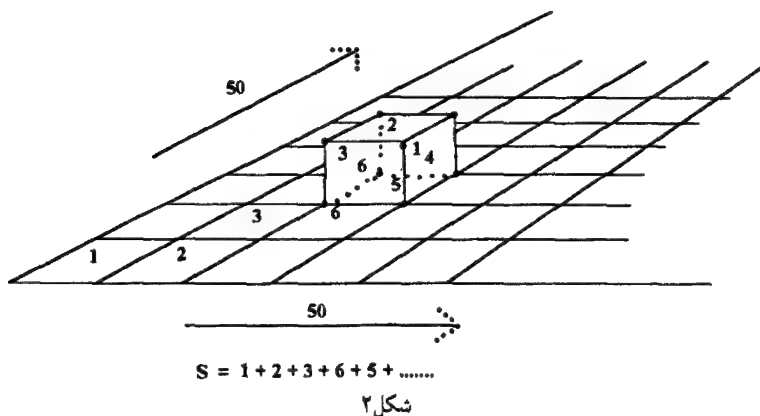
از طرف دیگر اگر در ابتدا تعداد توپهای سفید عددی زوج بود، امکان نداشت که در آخر یک (که عددی فرد است) توپ سفید باقی بماند و در نتیجه آخرین توپ سیاه خواهد بود.

۲. مکعب و صفحه شطرنج

(از المپیاد مسکو، ۱۹۷۳ [۱۹۹۰، ۳۵])

این مسأله مربوط به صفحه شطرنجی 50×50 و مکعبی است که وجه های آن هم اندازه مربعهای صفحه شطرنج است. مکعب را که ابتدا در گوشه سمت چپ پایین صفحه قرار دارد، متوالیاً حول یکی از یالهای قاعده اش می غلتانیم تا روی صفحه از مربعی به مربع دیگر برود و نهایتاً به گوشه مقابل برسد. در هر حرکت

فقط مجازیم مکعب را به طرف راست یا به طرف بالای صفحه شطرنجی بغلطانیم. حتی با این محدودیتها، برای رسیدن به گوشه مقابل راههای بسیار زیادی وجود دارد که از ترکیبهای ۴۹ گام به طرف راست و ۴۹ گام به طرف بالا به دست می آیند (در حقیقت تعداد این راهها $\binom{98}{49}$ ، یعنی عددی ۲۹ رقمی است). حال فرض کنید که روی هریک از وجههای این مکعب یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ نقش بسته است به طوری که مجموع عددهای واقع بر وجههای مقابل ۷ باشد. همچنین فرض کنید وقتی که مکعب روی یکی از مربعها قرار می گیرد، عددی که واقع بر وجه پایینی آن است روی مربع ثبت می شود. از آنجا که طبق قوانین مجاز نیستیم مکعب را روی مربعی برگردانیم که پیش از آن شماره خورده است، پس از خاتمه غلتاندن مکعب، در مجموع ۹۹ مربع، یعنی مجموع عددهای صحیح واقع بر این ۹۹ مربع، چقدر است؟



راه حل

کوشش برای دنبال کردن یکی از راههای نوعی، حتی در چند غلتش اول، نیاز به قدرت تصویری نامتعارف دارد. با وجود این، با کمی تلاش می توان تصویر به حد کافی روشنی از مسأله به دست آورد و به این ترتیب، با استفاده از روش ساده زیر به کلید حل مسأله دست یافت:

چون نمی توانیم روی صفحه شطرنجی به طرف چپ برگردیم یا به طرف پایین حرکت کنیم، پس هر وجه پایینی مکعب پیش از اینکه دوباره عددی را روی مربعی ثبت کند باید به بالای مکعب بیاید.

اینک وقتی وجهی که عدد x روی آن نوشته شده است بالای مکعب قرار دارد، وجه مقابل آن عدد $7 - x$ را ثبت می کند. از آنجا که هر عدد پیش از ثبت شدن مجدد باید به بالای مکعب بیاید، بین هر دو

باری که عدد $x - y$ ثبت می‌شود، جایی باید x ثبت شده باشد. به عبارت دیگر در هر مسیر عضوهای جفت مکمل $(x, y - x)$ یکی در میان و در فاصله‌های مختلف ظاهر می‌شوند و این فاصله‌ها بسته به اینکه شرایط چه باشد، با یکی از عضوهای این جفت آغاز می‌شوند. بعد از هر جفتی مانند $(x, y - x)$ ممکن است یک x یا یک $y - x$ اضافه، به عنوان اولین عضو مربوط به جفت آخر ناقص، ظاهر شود.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \overbrace{x \cdots y} & -x & \cdots & \overbrace{x \cdots y} & -x & \cdots - - - \cdots \overbrace{x \cdots y} & -x \cdots \\ \cdots & y & -x & \cdots & y & -x & \cdots - - - \cdots y & -x \cdots \end{array}$$

پس برای مثال ممکن است در طرف راست جفت مکمل $(1, 6)$ یا در ادامه دنباله هیچ‌گاه ۱ یا ۶ ظاهر نشود و یا دقیقاً یک ۱ یا یک ۶ به عنوان اولین عضو جفتی ناقص آمده باشد. جفتهای $(2, 5)$ و $(3, 4)$ نیز وضعیت مشابهی دارند. چون بیش از سه جفت ناقص وجود ندارد، حداکثر با سه تا از این ۹۹ عدد نمی‌توان جفت مکمل کاملی درست کرد.

اینک بدیهی است که این جفتهای مکمل تعداد زوجی از ۹۹ مکان را در دنباله اشغال می‌کنند و در نتیجه تعداد جفتهای ناقص فرد است. در نتیجه فقط ممکن است یک یا سه جفت ناقص داشته باشیم، یعنی وقتی که به ترتیب ۴۹ یا ۴۸ جفت مکمل کامل وجود دارد.

از آنجا که مجموع هر جفت مکمل کامل ۷ است، مجموع حاصل از ۴۹ جفت مکمل کامل در S برابر است با $343 = 7 \times 49$ ، و یک جفت ناقص این مجموع را به اندازه ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و یا ۶ افزایش می‌دهد. بنابراین در این حالت S عددی بین ۳۴۴ و ۳۴۹ است.

ولی مجموع حاصل از ۴۸ جفت مکمل کامل در S برابر است با $336 = 7 \times 48$ ، و عددهای صحیح باقی‌مانده از جفتهای $(1, 6)$ ، $(2, 5)$ و $(3, 4)$ به مجموع S مقداری بیش از $4 + 5 + 6 = 15$ و کمتر از $6 + 7 + 8 = 21$ نمی‌افزایند. بنابراین مقدار ماکسیمم $351 = 336 + 15$ و مقدار مینیمم $342 = 336 + 6$ است.

اثبات اینکه این کرانه‌ها واقعاً دست‌یافتنی هستند کار ساده‌ای است (که آن را به خواننده واگذار می‌کنیم). پس نتیجه این است که مقدارهای اکسترمم در حقیقت ۳۵۱ و ۳۴۲ هستند.

آیا جالب توجه نیست که تعداد بسیار زیادی از مقادیر ممکن S ، یعنی این تعداد از آنها

$$\binom{98}{49} = 254776122589808569027304228600$$

همگی در نوار باریکی از ۱۰ عدد صحیح جای می‌گیرند؟

۳. مسأله ۱۰۵۶ M

(کوانت، ۱۹۸۷، از آ. س. مرکوریف [۱۹۹۰، ۱۰۴])

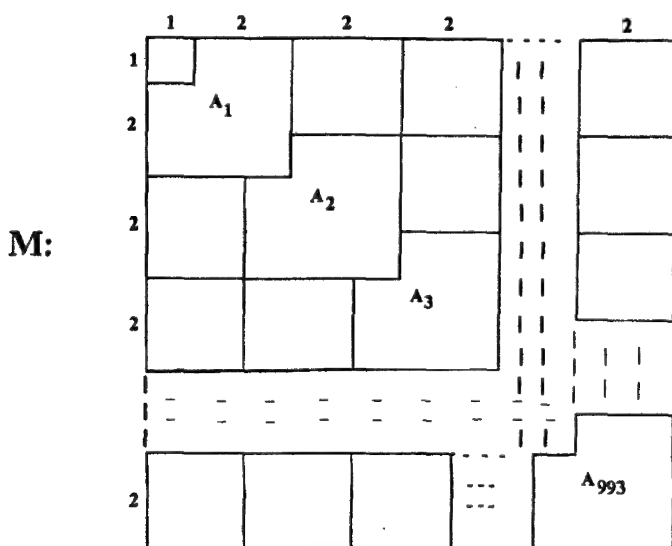
فرض کنید هریک از درایه‌های ماتریسی 1987×1987 مانند M ، عددی حقیقی است که از ۱ بزرگتر

نیست. همچنین فرض کنید که این درایه‌ها به دقت طوری انتخاب و مرتب شده باشند که مجموع چهار درایه هر زیرماتریس 2×2 آن مساوی با صفر باشد. ثابت کنید مجموع همه درایه‌های M از ۱۹۸۷ بیشتر نیست.

راه حل

از آنجا که می‌توانیم در مجموع درایه‌های M درایه‌های هر زیرماتریس 2×2 را حذف کنیم، نخستین فکری که به ذهن می‌رسد این است که تا حد ممکن زیرماتریسهای 2×2 را حذف کنیم و امیدوار باشیم که حداکثر ۱۹۸۷ درایه باقی بماند، زیرا در این صورت با توجه به این فرض که درایه‌ها از ۱ بزرگتر نیستند درستی حکم به دست می‌آید. اگر از گوشه سمت چپ در پایین شروع و سطرها و ستونهای مربوط به بخشهای 2×2 را حذف کنیم، در نهایت ماتریسی 1986×1986 که در همان گوشه واقع است حذف می‌شود. متأسفانه با این کار سطر اول و ستون آخر ماتریس M که شامل $1 - 1987 \times 2$ درایه هستند دست‌نخورده باقی می‌ماند. این تعداد خیلی بیشتر از آن چیزی است که انتظار داشتیم. بنابراین نتیجه می‌گیریم که این روش حل تا آن حد که امیدوار بودیم ساده نیست.

با وجود این تردیدی نیست که حذف تعداد زیادی از زیرماتریسهای 2×2 در هر برهانی از مسأله نقشی اساسی دارد. در اینجا مشکل اصلی یافتن تجزیه‌ای از M است که در آن پس از حذف همه زیرماتریسهای 2×2 بتوان به سادگی ثابت کرد که مجموع همه درایه‌های باقی‌مانده بیش از ۱۹۸۷ نیست. راه حل جورج گوهری زیباست!



شکل ۳

مطابق شکل اگر اولین درایه M را جداگانه در نظر بگیریم، می‌توانیم بقیه ماتریس M را به زیرماتریسهایی 2×2 و $993 = \frac{1}{4}(1987 - 1)$ بخش L -مانند تقسیم کنیم که عرض همه آنها ۲ و طولشان به ترتیبی ۳، ۵، ۷، ... و ۱۹۸۷ است. می‌توان بازوی هریک از شکلهای L -مانند را به بخشهای 2×2 و مجاور هم تقسیم کرد به‌طوری‌که این بخشها در طول بازوها امتداد می‌یابند و به قطعه‌ای گوشه‌ای مانند A منتهی می‌شوند که ماتریسی 3×3 است و گوشه سمت چپ بالای آن حذف شده است. بنابراین S ، یعنی مجموع همه درایه‌های M ، برابر است با مجموع درایه اول و ۹۹۳ مجموع مربوط به قطعه‌های گوشه‌ای، یعنی A_i ‌ها.

ولی با کمی کوشش معلوم می‌شود که مجموع درایه‌های هریک از قطعه‌های گوشه‌ای مانند A_i بیشتر از ۲ نیست.

$$\begin{array}{c}
 A_i: \begin{array}{|c|c|c|} \hline & a & b \\ \hline e & d & c \\ \hline f & g & h \\ \hline \end{array} \\
 \begin{aligned}
 & \text{مجموع درایه‌های } A_i \\
 & = (a + b + c + d) + e + f + g + h \\
 & = \quad \quad + (e + f + g + d) + h - d \\
 & = \quad \quad + \quad \quad + h - d \\
 & \leq 2, \quad |h|, |d| \leq 1 \quad \text{چون}
 \end{aligned}
 \end{array}$$

$$S \leq 1 + 993(2) = 1987 \quad \text{بنابراین همان‌طور که می‌خواستیم}$$

۴. مسابقات کورشاک

(مجارستان، ۱۹۸۳ [۱۹۸۹، ۲۳۰])

چند جمله‌ای $f(x)$ را در نظر بگیرید که در آن اولین و آخرین ضریب ۱ است و ضریبهای میانی، a_i ‌ها، همه نامنفی‌اند:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + 1$$

آیا جالب نیست که اگر معادله $f(x) = 0$ ، n ریشه حقیقی داشته باشد، مقدار $f(2)$ باید دست‌کم 3^n باشد؟

این نتیجه دور از ذهن را ثابت کنید: $f(2) \geq 3^n$.

راه حل

از آنجا که همه a_i ‌ها از صفر کمتر نیستند، اگر به جای x عدد نامنفی دلخواهی بگذاریم، مقدار $f(x)$ دست‌کم ۱ خواهد بود. در نتیجه همه ریشه‌های $f(x) = 0$ باید عددهایی منفی چون $-r_1, -r_2, \dots, -r_n$ باشند. با استفاده از این ریشه‌ها $f(x)$ را تجزیه می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + 1$$

$$\begin{aligned}
 &= (x + r_1)(x + r_2)(x + r_3) \cdots (x + r_n) \\
 &= x^n + (r_1 + r_2 + \cdots + r_n)x^{n-1} + (r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots)x^{n-2} \\
 &\quad + \cdots + r_1r_2 \cdots r_n
 \end{aligned}$$

بنابراین هر یک از a_k ها از دستور زیر به دست می آید

$$\begin{aligned}
 a_k &= \text{مجموع } \binom{n}{k} \text{ تا حاصل ضرب } k \text{ تایی ریشه ها} \\
 &= \sum r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_k}
 \end{aligned}$$

همچنین جمله ثابت، یعنی $r_1 r_2 \cdots r_n$ برابر با ۱ است.

اینک با استفاده از نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی درباره $\binom{n}{k}$ جمله ای که a_k را می سازند، نتیجه می شود

$$\frac{a_k}{\binom{n}{k}} = \frac{\sum r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_k}}{\binom{n}{k}} \geq [\prod r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_k}]^{1/\binom{n}{k}}$$

که از آن نتیجه می گیریم

$$a_k \geq \binom{n}{k} [\prod r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_k}]^{1/\binom{n}{k}}$$

مسئله این نتیجه چندان امیدبخش نیست. با این حال، این حاصل ضرب دست و پاگیر با توجه به این نکته ارزشمند از بین می رود که چون هیچ یک از r_i ها بر دیگری ارجحیت ندارد، بنابراین حاصل ضرب مورد نظر r_i ها به دفعات مساوی ظاهر می شوند. در نتیجه به ازای عدد صحیحی چون t

$$\begin{aligned}
 \prod r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_k} &= (r_1 r_2 \cdots r_n)^t \\
 &= 1^t = 1
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$a_k \geq \binom{n}{k}$$

اینک توجه می کنیم که k از ۱ تا $n-1$ تغییر می کند، بنابراین اگر فرض کنیم $a_0 = a_n = 1$ ، آنگاه a_0 و a_n به ترتیب مساوی با $\binom{n}{0}$ و $\binom{n}{n}$ هستند. در نتیجه

$$a_k \geq \binom{n}{k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

بنابراین می توانیم بنویسیم

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}$$

و مقدار $f(2)$ برابر است با $\sum_{k=0}^n a_k 2^{n-k}$. چون $a_k \geq \binom{n}{k}$ پس

$$f(2) \geq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 2^{n-k}$$

$$= (1+2)^n \text{ بنابر قضیه دوجمله‌ای،}$$

$$= 3^n$$

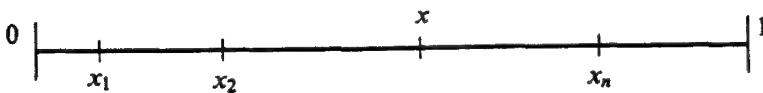
که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۵. مسأله ۵

(این مسأله مسأله دیگری از استرالیاست [۱۹۸۵، ۷۰] که و. ن. مورتی از دانشگاه دولتی پنسیلوانیا نیز آن را حل کرده است.)

ثابت کنید که اگر n عدد x_1, x_2, \dots, x_n به‌طور دلخواه از بازه بسته واحد، $[0, 1]$ ، انتخاب شوند، همواره می‌توانیم عددی مانند x در این بازه طوری بیابیم که میانگین فاصله‌های بی‌علامت آن تا x_i ها دقیقاً مساوی $\frac{1}{n}$ باشد:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x - x_i| = \frac{1}{n}$$



شکل ۴

راه حل

جورج با انتخاب روشی کاملاً سراسر است تابع

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x - x_i|$$

را در نظر می‌گیرد. اگر $x = 0$ ،

$$f(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |-x_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (x_i \geq 0 \text{ زیرا } x_i \in [0, 1])$$

اگر $x = 1$

$$f(1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |1 - x_i|$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - x_i) \quad (x_i \in [0, 1] \text{ زیرا } x_i \in [0, 1])$$

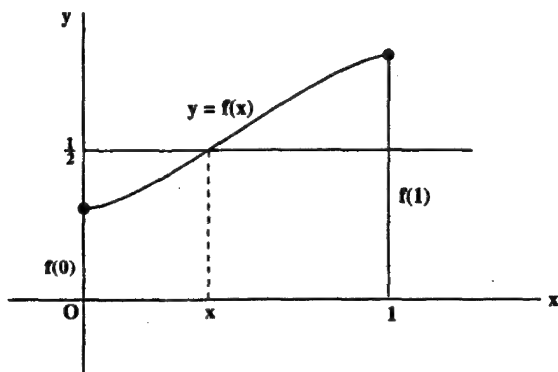
$$= \frac{1}{n} \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$= 1 - f(0)$$

و این رابطه مهم را به دست می آوریم

$$f(0) + f(1) = 1$$

بنابراین رابطه، یا $f(1)$ و $f(0)$ هر دو برابر با $\frac{1}{2}$ هستند که در این صورت دو جواب برای مسأله یافته ایم، و یا $\frac{1}{2}$ بین آنها قرار دارد که در این حالت از پیوستگی تابع نتیجه می شود به ازای x ای بین 0 و 1 ، $f(x) = \frac{1}{2}$.



شکل ۵

۶. مسأله M۱۰۴۳ از کوانت

(کوانت، ۱۹۸۷، از س. و. کنیاگین [۱۹۹۰، ۱۰۲])

موضوع این مسأله این است که آیا می توان مجموعه همه عددهای صحیح $(\dots, -1, 0, 1, 2, \dots)$ را به سه زیرمجموعه افراز کرد به طوری که به ازای هر n ، هریک از عددهای صحیح n ، $(n-50)$ و $(n+1987)$ در یکی از این افرازا قرار داشته باشد؟

راه حل

بباید قبل از اینکه پیش داوری کنیم بکوشیم افراز مطلوب را بسازیم. مناسب است که از نمادگذاری زیر استفاده کنیم:

فرض کنید $m \sim k$ به این معنا باشد که m و k به یک زیرمجموعه متعلق اند و

(m, k, t) به معنای این باشد که هریک از عددهای m ، k و t به یکی از سه

زیرمجموعهٔ مختلف تعلق دارد. در نتیجه برای مثال (m, k, t) یعنی t با m یا k در یک زیرمجموعه قرار ندارد.

ابتدا دو نتیجهٔ اساسی به دست می‌آوریم که لزوماً باید دربارهٔ هر راه موفقیت‌آمیزی برای افزایش عددهای صحیح برقرار باشند:

الف) $(n + 1937) \sim n$ (یعنی به ازای هر عدد صحیح مانند n باید عددهای صحیح n و $(n + 1937)$ در یک مجموعه باشند) و

ب) $(n - 150) \sim n$.

الف) $(n + 1937) \sim n$:

چون به ازای هر عدد صحیح مانند n باید ویژگی اساسی $(n - 50, n, n + 1987)$ برقرار باشد، اگر به جای n به ترتیب مقدارهای $n - 50$ و $n + 1987$ را قرار دهیم نتیجه می‌گیریم که

$$(n - 100, n - 50, n + 1937), (n + 1937, n + 1987, n + 2 \times 1987)$$

از اولین ویژگی معلوم می‌شود که امکان ندارد عدد $(n + 1937)$ با $(n - 50)$ در یک زیرمجموعه باشد، و از دومی نیز معلوم می‌شود که این عدد با $(n + 1987)$ در یک زیرمجموعه نیست. ولی با توجه به ویژگی اصلی $(n - 50, n, n + 1987)$ ، $(n + 1937)$ باید با یکی از سه عدد $(n - 50)$ ، n و یا $(n + 1987)$ در یک زیرمجموعه باشد. با کنار گذاشتن دو حالت اول و سوم نتیجه می‌شود که $(n + 1937)$ و n باید در یک زیرمجموعه باشند.

به عبارت دیگر به ازای هر عدد صحیح مانند n تمام جمله‌های تصاعد حسابی $n, (n + 1937), (n + 2 \times 1937), \dots$ باید در یک زیرمجموعه باشند. به ویژه تمام جمله‌های تصاعد $(0, 1937, 2 \times 1937, \dots)$ باید در یک زیرمجموعه باشند.

از این نتیجه کلی در قسمت (الف) در اثبات ویژگی دوم، $(n - 150) \sim n$ ، استفاده می‌کنیم. بنابر ویژگی دوم تمام جمله‌های تصاعد $n, n - 150, (n - 2 \times 150), \dots$ همواره در یک زیرمجموعه قرار می‌گیرند. به ویژه اینکه تصاعد $(50 - 150 \times 646), (50 - 150 \times 645), (50 - 150 \times 644), \dots$ نیز همین ویژگی را دارد.

ب) $(n - 150) \sim n$:

تاکنون می‌دانیم که ویژگی $(n - 100, n - 50, n - 1937)$ باید برقرار باشد. چون همواره n و $(n + 1937)$ در یک زیرمجموعه هستند، بنابراین $(n - 100, n - 50, n)$. چون این ویژگی در مورد هر n درست است، نتیجه می‌گیریم $(n - 100, n - 50, n - 150)$ که از آن نتیجه می‌شود $(n - 150)$ با هیچ یک از عددهای $(n - 100)$ و $(n - 50)$ در یک زیرمجموعه قرار ندارد. با توجه به ویژگی ثابت شدهٔ $(n - 100, n - 50, n)$ نتیجه می‌گیریم که همواره $(n - 150)$ و n در یک زیرمجموعه هستند.

شاید تاکنون با خود اندیشیده‌اید که عددهای ۱۹۳۷ و ۱۵۰ چه ویژگی جالبی دارند. پاسخ این پرسش این است که

$$۵۰(۱۹۳۷) = ۶۴۶(۱۵۰) - ۵۰ (= ۹۶۸۵۰)$$

بنابر ویژگی تصاعد حسابی خاصی که در بالا ذکر شد، رابطه‌های بسیار مهم زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} ۰ &\sim ۱۹۳۷ \sim ۲ \times ۱۹۳۷ \sim \dots \sim ۵۰ \times ۱۹۳۷ = ۶۴۶(۱۵۰) - ۵۰ \sim ۶۴۵(۱۵۰) - ۵۰ \\ &\sim ۶۴۴(۱۵۰) - ۵۰ \sim \dots \sim ۰ \times (۱۵۰) - ۵۰ = -۵۰ \end{aligned}$$

که از آنها معلوم می‌شود ۰ و -۵۰ باید در یک زیرمجموعه باشند. ولی این مطلب با ویژگی $(n, n+1, n+1987)$ ، وقتی که $n=۰$ ، تناقض دارد و در نتیجه افزاز موردنظر غیرممکن است! ممکن است راه‌حلهای دیگری برای این مسأله وجود داشته باشد، ولی آیا راه حل جورج حاکی از خلاقیت فوق‌العاده ذهنی او نیست؟ این مجموعه کوچک را با مسأله ساده زیر به پایان می‌بریم.

۷. مسأله ۱۰۵۷ M از کوانت

(کوانت، ۱۹۸۷، [۱۰۵، ۱۹۹۰])

فرض کنید دو بازیکن A و B ، ابتدا A و سپس B ، یکی در میان و مطابق دو قانون زیر عددهایی طبیعی را می‌نویسند:

- (۱) هیچ یک از عددها نباید از کرانی مانند L که هر دو بر آن توافق دارند بیشتر باشد، و
- (۲) هیچ یک از عددها نباید مقسوم علیه عدد دیگری باشد که قبلاً از آن استفاده شده است. اولین بازیکنی که نتواند بازی کند بازنده است.

برای مثال به ازای $L = ۱۰$ ممکن است بازی به شکل زیر باشد:

A ابتدا ۱۰ را می‌نویسد (که به این ترتیب ۱، ۲، ۵ و ۱۰ حذف می‌شوند و ۳، ۴، ۶، ۷، ۸ و ۹ هنوز قابل استفاده‌اند)؛

B ، ۴ را می‌نویسد (که در نتیجه فقط خود ۴ حذف می‌شود و ۳، ۶، ۷، ۸ و ۹ قابل استفاده‌اند)؛

A ، ۷ را می‌نویسد (که در نتیجه ۳، ۶، ۸ و ۹ باقی می‌ماند)؛

و B ، ۸ را می‌نویسد (که فقط ۳، ۶ و ۹ باقی می‌ماند)،

اینک اگر A ساده لوحانه ۶ را بنویسد، که به این ترتیب ۳ حذف می‌شود، B با نوشتن ۹ برنده می‌شود؛ ولی A با نوشتن ۳ می‌برد، زیرا در این صورت باید عددهای ۶ و ۹ را نوشت، که یکی را B می‌نویسد و دیگری را A .

بنابراین امکان برد برای هر دو طرف وجود دارد. با وجود این ثابت کنید به ازای هر کرانی L ترفندی برای اینکه A ببرد وجود دارد.

راه حل

تأکید می‌کنیم که لازم نیست ترفندی برای اینکه A ببرد بیابیم، بلکه باید ثابت کنیم چنین چیزی وجود دارد. از آنجا که باید یکی از دو بازیکن برنده شود (زیرا ممکن نیست هریک از آن دو اولین کسی باشد که نمی‌تواند بازی کند)، پس اگر بتوانیم ثابت کنیم برای اینکه B ببرد ترفندی در روش بازی وجود ندارد، آن وقت معلوم می‌شود که باید روشی برای بازی کردن وجود داشته باشد که اگر A آن را در پی گیرد B موفق نشود. یعنی وجود ترفندی را برای اینکه A ببرد ثابت کرده‌ایم. در اینجا از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض کنید ترفندی برای اینکه B ببرد وجود داشته باشد. در این صورت B می‌تواند همه حرکت‌های اول ممکن را که A انجام می‌دهد جواب دهد. اینک، چون ۱ مقسوم‌علیه همه عددهای صحیح است، اگر قرار باشد زمانی عدد ۱ نوشته شود، A باید در اولین حرکتش این کار را بکند. ترفند B باید بتواند با این حرکت مقابله کند؛ مثلاً ممکن است B عدد n را بنویسد که در این صورت A باید بازی را در مجموعه $\{L, 1, n+1, n-1, \dots, 2\}$ ، که مقسوم‌علیه‌های احتمالی n از آن حذف شده‌اند، دنبال کند.

از طرف دیگر A می‌تواند آزادانه هریک از عددهایی را بنویسد که از L بزرگتر نیستند و ممکن است که همین عدد صحیح n را در آغاز بازی بنویسد. متأسفانه این اقدام B را با همان انتخاب‌های منجر به باختی مواجه می‌سازد که ترفند B ، وقتی A در ابتدا ۱ را بنویسد، آنها را به A تحمیل می‌کند. بنابراین هر ترفندی برای اینکه B ببرد، موجبات شکستش را در بردارد و از این رو پذیرفتنی نیست.

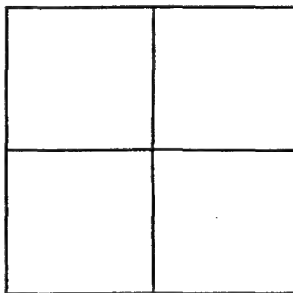
جالب توجه است که آگاهی A از وجود ترفندی برای بردش تسلی خاطر مختصری برای اوست، زیرا اگرچه به این ترتیب موفقیت او در یافتن این ترفند تضمین شده است، ولی این امر او را در چگونگی یافتن آن یاری نمی‌دهد.

تجزیه مثلث

۱. دست‌گرمی ساده

اگر از شما بخواهند یک مربع را به چهار مربع کوچکتر تقسیم کنید، با اندکی فکر کردن آن را به صورت شطرنجی به چهار بخش مساوی تقسیم می‌کنید. اما اگر بخواهند که آن را به ۲، ۳ یا ۵ مربع تقسیم کنید: به طور قطع با شکست مواجه می‌شوید زیرا همه این حالتها ناممکن‌اند. با وجود این، ثابت کنید که این موارد، تنها حالت‌های استثنایی هستند، به عبارت دیگر،

ثابت کنید که به‌ازای $n = 4, 6, 7, 8, \dots$ می‌توان هر مربع دلخواه را به n مربع کوچکتر که لزوماً هم‌اندازه نیستند تجزیه کرد.



شکل ۶

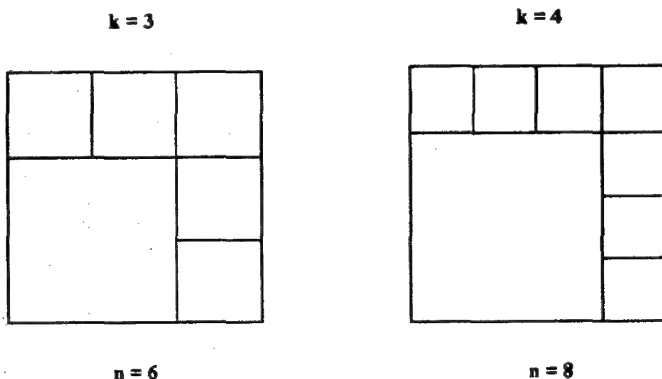
بدیهی است که تقسیم هریک از مربعهای کوچک به چهار بخش مساوی تعداد مربعها را سه واحد افزایش می‌دهد (زیرا چهار مربع به‌دست می‌آید درحالی‌که مربع اولی از بین می‌رود). بنابراین اگر بتوانیم مربع را به n مربع تجزیه کنیم، آن‌وقت می‌توانیم همه تجزیه‌های مربوط به خانواده نامتناهی $\{n, n+3, n+6, n+9, \dots\}$ را نیز به‌دست آوریم. در نتیجه اگر بتوانیم دریابیم که چگونه می‌توان

این کار را در سه حالتی که $n = 4, 6, 8$ انجام داد، آنگاه می‌توانیم همه حالت‌های مطلوب را به دست آوریم:

$$\{4, 7, 10, 13, \dots\}, \{6, 9, 12, \dots\}, \{8, 11, 14, \dots\}$$

پیشتر دیدیم که وقتی $n = 4$ چه باید کرد، پس تنها حالت‌های ۶ و ۸ باقی مانده‌اند.

اما همان‌طور که خواهید دید، اینها نیز مسائل ساده‌ای هستند. اگر دو ضلع مجاور از مربع مفروض را به k بخش مساوی تقسیم کنید و روی هریک از این ضلعها نواری متشکل از k مربع مساوی بسازید، حاشیه‌ای با $2k - 1$ مربع کوچک به دست می‌آورید (سطر و ستون حاصل از مربعها در یک مربع گوشه‌ای مشترک‌اند). با در نظر گرفتن مربع باقی‌مانده از شکل که متمم این مربعهاست، تجزیه‌ای متشکل از $2k$ مربع به دست می‌آید. بنابراین اگر $k = 3$ و $k = 4$ ، به مقصود می‌رسیم.



شکل ۷

۲. مسأله مثلث

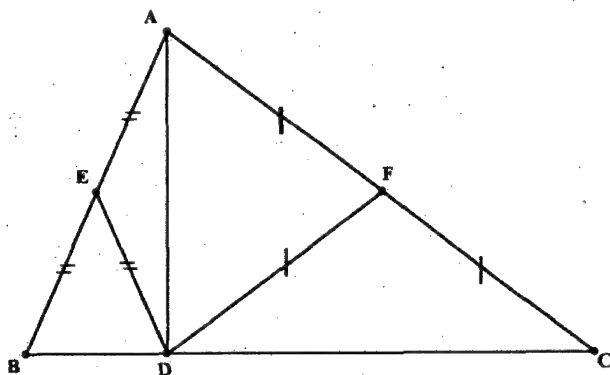
مسأله‌ای مشابه درباره تجزیه مثلث به n مثلث کوچکتر را می‌توان به آسانی با رسم دسته خط دلخواهی متشکل از $n - 1$ خط که از یکی از رأسهای مثلث می‌گذرند حل کرد. بنابراین برای اینکه مسأله مفهوم جدی‌تری بیابد شرایط بیشتری لازم است. درواقع، آنچه که این بار می‌خواهیم این است که مثلث تنها به مثلث‌های متساوی‌الساقین تجزیه شود. ممکن است وقتی که فقط وجود دو یا سه مثلث در تجزیه مورد نظر باشد مسأله قابل حل نباشد، ولی جالب آنجاست که به ازای هر $n, n \geq 4$ ، هر مثلث دلخواه تجزیه‌ای به مثلث‌های متساوی‌الساقین دارد.

به ازای هر عدد طبیعی مانند $n, n \geq 4$ ، ثابت کنید هر مثلث دلخواه را می‌توان به n مثلث متساوی‌الساقین تجزیه کرد.

این مسأله بخشی از مسأله شماره ۲۰۰ مجله کروکس ماتماتیکوروم [۱۹۷۶، ۲۲۰] است و راه حل

زیرکانه زیر که از گالی سالواتوره از آتاوا (با نام مستعار لئو ساوه) است در سال ۱۹۷۷ (۱۳۴ - ۱۳۵) به چاپ رسیده است. احتمالاً از خواندن مسأله ۱۱۱۵ که در سال ۱۹۸۶، صفحه ۲۷ مطرح و پاسخ آن در سال ۱۹۸۷، صفحه ۱۸۹ چاپ شد و تا حد زیادی به این مسأله مربوط می شود لذت خواهید برد: همه عددهای صحیح مانند n را که به ازای آنها می توان مثلث متساوی الاضلاعی را به n مثلث متساوی الساقین تجزیه کرد تعیین کنید.

اگرچه ممکن است دو ارتفاع از مثلث بیرون آن قرار گیرند ولی ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع همواره درون مثلث جای می گیرد. اگر AD یکی از ارتفاعهای درونی مثلث ABC باشد و E و F وسط دو ضلع دیگر باشند، آنگاه AD ، DE و DF مثلث ABC را به چهار مثلث متساوی الساقین کوچکتر تقسیم می کنند (وسط وتر مثلث قائم الزاویه از سه رأس آن به یک فاصله است، زیرا این نقطه مرکز دایره محیطی این مثلث است). بنابراین می توان هر مثلث دلخواهی را به چهار مثلث متساوی الساقین تجزیه کرد.

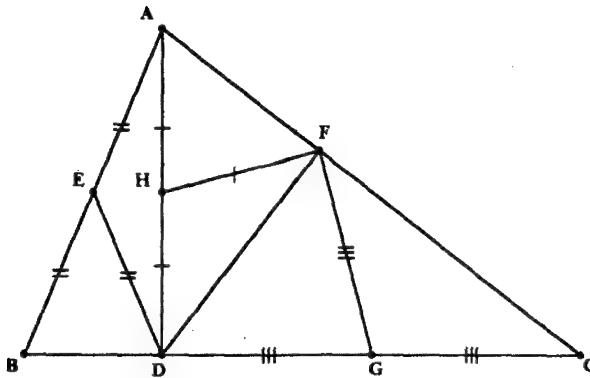


$n = 4$

شکل ۸

همچنین اگر هر مثلث کوچک در تجزیه را به چهار مثلث متساوی الساقین تجزیه کنیم، تعداد مثلثها را سه واحد افزایش داده ایم. بنابراین مانند مسأله دست گرمی مربوط به مربعها، از حل مسأله حاضر در مورد n مثلث، خود به خود جواب مربوط به خانواده نامتناهی $\{n, n+3, n+6, \dots\}$ را نیز یافته ایم. بنابراین کافی است تنها حالت هایی را بررسی کنیم که $n = 4, 5, 6$ ، و از آنجا که تا به حال حالت ۴ را بررسی کرده ایم، بررسی حالت های ۵ و ۶ باقی مانده است.

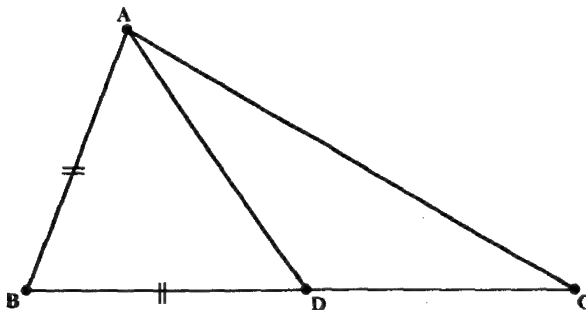
ولی حالتی که $n = 6$ نتیجه ای است از حالتی که $n = 4$. پس از رسم ارتفاع درونی AD ، مثلث ABC به دو مثلث قائم الزاویه افزای می شود؛ سپس یکی از این دو مثلث را با اتصال D به وسط وترش به دو مثلث، و مثلث دیگر را به روش قبل به چهار مثلث متساوی الساقین تقسیم می کنیم.

 $n = 6$

شکل ۹

در حالتی که $n = 5$ راحت تر است حالتی را که مثلث مفروض ABC متساوی الاضلاع است جداگانه بررسی کنیم.

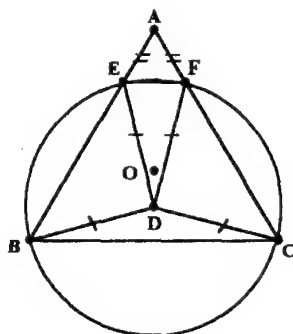
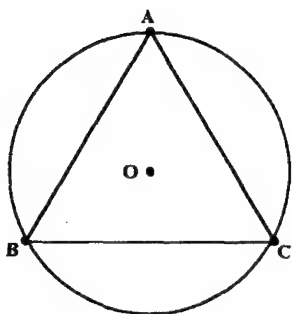
(۱) در حالت کلی مثلث ABC متساوی الاضلاع نیست و دو ضلع نابرابر دارد. اگر $AB < BC$ ، آنگاه BD را به اندازه BA روی BC جدا می‌کنیم تا مثلث متساوی الساقین ABD به دست آید. سپس با تقسیم مثلث باقی مانده، ADC ، به چهار مثلث متساوی الساقین، تجزیه مطلوبی برای مثلث اول به پنج مثلث حاصل می‌شود.



شکل ۱۰

(۲) بدیهی است که وقتی ABC متساوی الاضلاع باشد، رهیافت قبلی به نتیجه نمی‌رسد. در هر مثلث متساوی الاضلاع، مرکز دایره محیطی، O ، مرکز ارتفاعی (به عبارت دیگر نقطه برخورد ارتفاعها)، مرکز دایره محاطی و نیز مرکز ثقل مثلث همه یک نقطه‌اند و در واقع می‌توانیم این نقطه را مرکز مثلث

بنامیم. با وجود این اگر AO را کمی امتداد دهیم تا به ضلع BC نزدیکتر شود و انتهای آن را D بنامیم، آنگاه دایره به مرکز D که از B و C می‌گذرد، دیگر از رأس A نمی‌گذرد ولی AB و AC را در نقاط E و F قطع می‌کند. از تقارن شکل به وضوح نتیجه می‌شود که AE و AF برابرند، پس $\triangle AEF$ متساوی الساقین (و در حقیقت متساوی الاضلاع) است. بنابراین EF ، DB ، DC ، DE و DF تجزیه مطلوب $\triangle ABC$ را به پنج مثلث متساوی الساقین به دست می‌دهند.



شکل ۱۱

آزمون ریاضیات دعوتی امریکا، ۱۹۸۷

اینک به سه مسأله از آزمون ریاضیات دعوتی امریکا در سال ۱۹۸۷ می‌پردازیم.

مسأله ۱

با کمی کوشش معلوم می‌شود که هر عدد طبیعی و فرد مانند $2k + 1$ را می‌توان به صورت مجموع رشته‌ای از اعداد طبیعی متوالی نوشت. دست‌کم همواره می‌توان نوشت $k + (k + 1) = 2k + 1$. ولی برخی از اعداد فرد برابر با مجموع چندین رشته از این قبیل‌اند. برای مثال

$$21 = 10 + 11 = 6 + 7 + 8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

در این مسأله از ما خواسته‌اند که k ، طول طولانیترین رشته از اعداد صحیحی را که مجموعشان برابر با 3^{11} است به دست آوریم.

راه حل

اگر طولانیترین رشته از k عدد طبیعی متوالی از این نوع با عدد صحیح a آغاز شود، آنگاه

$$a + (a + 1) + \dots + (a + k - 1) = 3^{11}$$

$$\frac{k}{2}(2a + k - 1) = 3^{11}$$

$$k(2a + k - 1) = 2 \times 3^{11}$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که k باید 2×3^{11} را بشمارد. بنابراین k باید یکی از ۲۴ عدد زیر باشد

$$1, 3, 3^2, \dots, 3^{11}, 2, 2 \times 3, 2 \times 3^2, \dots, 2 \times 3^{11}$$

بدون تردید عددی که رشته موردنظرمان با آن آغاز می‌شود دست‌کم برابر با ۱ است، هر چند که ذکر این مطلب چندان مفید به نظر نمی‌رسد. بنابراین مجموع این رشته دست‌کم برابر است با

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{1}{2}k(k + 1)$$

بنابراین نابرابری $\frac{1}{4}k(k+1) \geq 3^{11}$ را به دست آورده ایم، اگرچه معلوم نیست که این نابرابری چه فایده‌ای دارد. از اینجا نتیجه می‌شود

$$k(k+1) = k^2 + k \leq 2 \times 3^{11} = 354294$$

از این مطلب دست‌کم نتیجه می‌گیریم که k باید از ریشهٔ دوم 2×3^{11} کمتر باشد:

$$k < \sqrt{354294} = 595,226 \dots$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$k < 596$$

به نظر می‌رسد که این نتیجه فایده‌ای نیز در بر دارد، زیرا به این ترتیب دقیقاً نصف ۲۴ حالت ممکن حذف می‌شود و تنها حالت‌های زیر باقی می‌مانند

$$k \in \{1, 3, 9, 27, 81, 243, 2, 6, 18, 54, 162, 486\}$$

از آنجا که به نظر نمی‌رسد بتوانیم شرایط محدود کنندهٔ دیگری به دست آوریم، پس این امکانات را به امید اینکه یکی از بزرگترین آنها قابل استفاده باشد بررسی می‌کنیم. در همهٔ حالتها

$$k(2a + k - 1) = 2 \times 3^{11}$$

و بنابراین اگر فرض کنیم $k = 486 = 2 \times 3^5$ به دست می‌آوریم

$$2a + 485 = \frac{2 \times 3^{11}}{2 \times 3^5} = 3^6 = 729$$

پس $2a = 244$ و $a = 122$ ، یعنی a عددی طبیعی شد. در نخستین کوشش دریافتیم که اگر $k = 486$ ، k قابل استفاده است و روشن است که این مقدار بزرگترین مقدار قابل قبول k است. سری نظیر این مقدار چنین است

$$\begin{aligned} 122 + 123 + \dots + 607 &= \frac{1}{4} \times 486(244 + 485) \\ &= \frac{1}{4}(2 \times 3^5)(729) = 3^5 \times 3^6 = 3^{11} \end{aligned}$$

مسألهٔ ۲

اینک به مسأله‌ای می‌پردازیم که به نظر من برجسته‌ترین مسألهٔ این آزمون است. این مسأله مربوط به یکی از شیوه‌های قدیمی مرتب کردن مجموعه‌ای از اعداد به ترتیب صعودی به نام مرتب کردن سرفتنی^۱ است. در ترتیب دلخواهی از اعداد ممکن است «پس و پیشهای» زیادی وجود داشته باشد؛ به عبارت دیگر ممکن است عددی بزرگتر پیش از عددی کوچکتر قرار گرفته باشد.

الگوریتم موردنظر ما شیوه‌ای مقدماتی برای جستجوی پس و پیشها و جابه‌جا کردن یکی یکی آنهاست تا وقتی که همه آنها جابه‌جا شوند.

اگر کار را با ترتیب مفروضی مانند r_1, r_2, \dots, r_n آغاز کنیم، با مقایسه اعداد واقع در دو مکان نخست، (r_1, r_2) ، و سپس جفتی که در مکانهای ۲ و ۳ قرار دارند و به دنبال آن جفتی که در مکانهای ۳ و ۴ واقع‌اند و الی آخر، پس و پیشها را می‌یابیم. هر بار که پس و پیشی می‌یابیم، فقط جای این دو عدد را عوض می‌کنیم و سپس به سراغ جفت واقع در مکان بعدی می‌رویم. روشن است که این «سُررفتن» هیچ عددی را جلوتر از عددی بزرگتر از آن نمی‌برد، بلکه آن را آنقدر با خود می‌برد تا اینکه عدد بزرگتری جایگزین آن شود. بنابراین در اولین سُررفتن بزرگترین عدد انتخاب و به انتهای طرف راست برده می‌شود. در سُررفتن دوم بزرگترین عدد بعدی به دومین مکان از آخر (در کنار بزرگترین عدد در انتها) برده می‌شود و به همین ترتیب کار ادامه می‌یابد. البته ضمن اینکه عددهای بزرگ در انتها جمع می‌شوند بسیاری از پس و پیشها جابه‌جا می‌شوند.

برای روشن شدن ایده‌ی اساسی این روش، توجه کنید که اولین سُررفتن در مجموعه $\{1, 9, 8, 7\}$ شامل مراحل زیر است

$$1, 9, 8, 7 \rightarrow 1, 9, 8, 7 \rightarrow 1, 8, 9, 7 \rightarrow 1, 8, 7, 9$$

و سُررفتن دوم کار را تمام می‌کند:

$$1, 8, 7, 9 \rightarrow 1, 8, 7, 9 \rightarrow 1, 7, 8, 9 \rightarrow 1, 7, 8, 9$$

اینک مسأله را مطرح می‌کنیم:

فرض کنید r_1, r_2, \dots, r_{40} ترتیبی تصادفی از ۴۰ عدد باشد. احتمال اینکه پس از سُررفتن اول r_{20} به مکان ۳۰ام منتقل شود چقدر است؟

راه‌حل

همان‌طور که گفتیم، در هر سُررفتن عددی را انتخاب و از طریق جابه‌جا کردن پس و پیشها آن را به جلو منتقل می‌کنیم تا اینکه به عدد بزرگتری برخورد کنیم. در هر مرحله عددی را که «فعلاً در مکان i واقع است» با عددی که «از اول در مکان $i+1$ واقع است» (یعنی r_{i+1} و r_i فعلی) مقایسه می‌کنیم، و در نتیجه r_i فعلی همواره بزرگترین عددی است که تا این مکان به آن برخورد کرده‌ایم. پس در همه حالتها

$$r_i = \max\{r_1, r_2, \dots, r_i\} \text{ فعلی}$$

عدد r_i فعلی «بزرگترین عدد تا آن موقع» و حاکم است تا وقتی که در مقایسه با عدد بزرگتری مغلوب شود. در این هنگام « r_i فعلی» آخرین ساکن مکان i ام یا به عبارت دیگر «آخرین r_i » می‌شود، اگرچه این عدد هنوز این وجه تمایز را دارد که در i مکان نخست بزرگترین است. بدیهی است که در این

صورت π_{i+1} ، عدد بزرگتر، در $i+1$ مکان نخست بزرگترین است. در نتیجه اگر بخواهیم π_{20} به جلو برود و در مکان «نهایی» π_{20} بایستد، π_{20} باید در 30 مکان نخست بزرگترین و π_{31} باید در 31 مکان نخست بزرگترین باشد. مسأله ما تعیین احتمال روی دادن این دو ویژگی در ترتیبی تصادفی از 40 عدد مفروض است.

خوشبختانه این مسأله حقیقتاً ساده است. از آنجا که اعداد بر یکدیگر ارجحیت ندارند، بزرگترین عدد در بین i عدد نخست در مکانی خاص به همان تعدادی ظاهر خواهد شد که در بقیه i مکان نخست می تواند ظاهر شود. بنابراین احتمال اینکه π_{20} بزرگترین عدد در 30 مکان نخست باشد برابر با $1/30$ و احتمال اینکه π_{31} بزرگترین عدد در 31 مکان نخست باشد برابر با $1/31$ است. چون این احتمالات مستقل اند، احتمال وقوع نتیجه مطلوب برابر است با

$$\frac{1}{30} \times \frac{1}{31} = \frac{1}{930}$$

مسأله ۳

در مسأله سوم فقط از ما خواسته اند که مقدار زیر را حساب کنیم

$$N = \frac{(10^4 + 3224)(22^4 + 3224)(34^4 + 3224)(46^4 + 3224)(58^4 + 3224)}{(4^4 + 3224)(16^4 + 3224)(28^4 + 3224)(40^4 + 3224)(52^4 + 3224)}$$

راه حل

بی تردید راهی برای تجزیه این عبارتها وجود دارد. چون $18^2 = 324$ ، به یاد عبارتهای تجزیه ناپذیری به صورت $a^2 + b^2$ و $a^2 + b^2$ می افتیم. با وجود این در وضعیت فعلی هر عامل به صورت $a^2 + 18^2$ است و دستکم باید بکوشیم این را تجزیه کنیم. اگر مربعی کامل تشکیل دهیم به دست می آوریم

$$\begin{aligned} a^2 + 18 &= (a^2 + 18)^2 - 36a^2 \\ &= (a^2 + 18 + 6a)(a^2 + 18 - 6a) \end{aligned}$$

و به این ترتیب عدد مفروض، N ، را که می توانیم آن را به صورت

$$N = \prod_{k=0}^4 \frac{(10 + 12k)^4 + 18^2}{(4 + 12k)^4 + 18^2}$$

بنویسیم، به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^4 \frac{[(10 + 12k)^2 + 18 + 6(10 + 12k)][(10 + 12k)^2 + 18 - 6(10 + 12k)]}{[(4 + 12k)^2 + 18 + 6(4 + 12k)][(4 + 12k)^2 + 18 - 6(4 + 12k)]} \\ = \prod_{k=0}^4 \frac{(144k^2 + 312k + 178)(144k^2 + 168k + 58)}{(144k^2 + 168k + 58)(144k^2 + 24k + 10)} \end{aligned}$$

با حذف عاملهای مساوی در صورت و مخرج به دست می آوریم

$$N = \prod_{k=0}^4 \frac{144k^2 + 312k + 178}{144k^2 + 24k + 10}$$

این عبارت را به صورت زیر می نویسیم

$$N = \prod_{k=0}^4 \frac{n_k}{d_k} = \frac{n_0 n_1 n_2 n_3 n_4}{d_0 d_1 d_2 d_3 d_4}$$

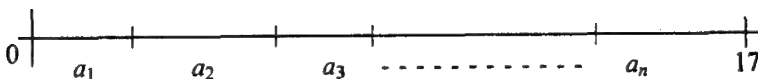
براساس این نمادها نتیجه می گیریم $d_{k+1} = n_k$ زیرا

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= 144(k+1)^2 + 24(k+1) + 10 \\ &= 144k^2 + 312k + 178 = n_k \end{aligned}$$

و بنابراین N برابر است با

$$\frac{n_4}{d_0} = \frac{144(4)^2 + 312(4) + 178}{10} = \frac{3730}{10} = 373$$

مسأله‌ای از آزمون ریاضیات دعوتی امریکا، ۱۹۹۱



بدیهی است که به ازای هر عدد صحیح مانند $n > 1$ ، می‌توانیم بازه $(0, 17)$ را به بی‌نهایت طریق مختلف به n بخش ناتهی مثلاً به طولهای a_1, a_2, \dots, a_n تقسیم کنیم (درواقع با هر انتخابی از $n-1$ نقطه متمایز درون این بازه این کار انجام می‌شود). اینک مجموع

$$\begin{aligned} S_n(P) &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(2k-1)^2 + a_k^2} \\ &= \sqrt{1^2 + a_1^2} + \sqrt{3^2 + a_2^2} + \dots + \sqrt{(2n-1)^2 + a_n^2} \end{aligned}$$

تابعی از افرازهایی مانند $P = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ است که با تغییر P روی همه افرازهای ممکن بی‌نهایت مقدار می‌گیرد. فرض کنید S_n مقدار مینیم این تابع باشد:

$$S_n = \min_P S_n(P) = \min_P \sum_{k=1}^n \sqrt{(2k-1)^2 + a_k^2}$$

جالب است که می‌توانیم نتیجه بگیریم دقیقاً یکی از مقادیر

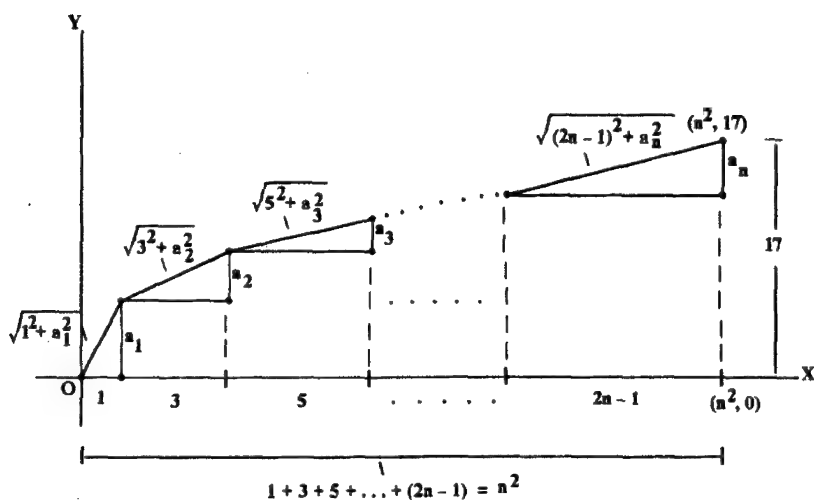
$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

عددی صحیح است. این مقدار کدام است؟

راه حل

با توجه به اینکه $\sqrt{(2k-1)^2 + a_k^2}$ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول ضلعهای $(2k-1)$ و a_k است، که به این ترتیب $S_n(P)$ برابر می‌شود با مجموع n وتر از این نوع، می‌توانیم هندسی فکر کنیم و با این طرز تفکر مسأله تقریباً حل شده است. اگر در صفحه مختصات این وترها را به‌طور متوالی به

یکدیگر وصل کنیم تا به این ترتیب مبدأ به نقطه $(n^2, 17)$ مرتبط شود، برای حل کردن مسأله گامی کوچک و معقول برداشته‌ایم.



شکل ۱۲

در این صورت بدیهی است که

$$\begin{aligned} S_n &= \min S_n(P) \\ &= \text{طول مسیر مستقیم بین } (0, 0) \text{ و } (n^2, 17) \\ &= \sqrt{n^2 + 17^2} \end{aligned}$$

برای اینکه S_n عددی صحیح باشد باید

$$n^2 + 17^2 = t^2$$

که به این ترتیب $(n^2, 17, t)$ سه‌تایی فیثاغورسی است. ولی تنها یک سه‌تایی فیثاغورسی وجود دارد که طول یکی از ساقهای مثلث متناظرش برابر با ۱۷ است. نتیجه‌ای نسبتاً مشهور که تحقیق آن بسیار ساده است این است که اگر m عددی فرد (مانند ۱۷) باشد، آنگاه

$$(m, \frac{1}{4}(m^2 - 1), \frac{1}{4}(m^2 + 1))$$

سه‌تایی فیثاغورسی است. بنابراین $(17, 144, 145)$ سه‌تایی مطلوب است و در نتیجه

$$n^2 = 144, n = 12$$

بنابراین $S_{12} = 145$ ، تنها عدد صحیح بین S_n ‌هاست.

نُه مسأله استفاده نشده از المپیاد بین‌المللی، ۱۹۸۷

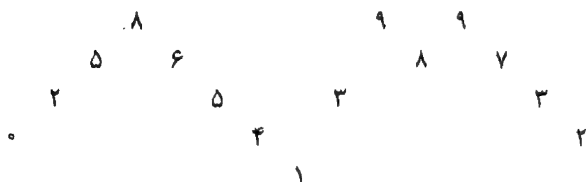
۱. مسأله‌ای از امریکا

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۷۹؛ راه‌حل مشابهی در ۱۹۸۹، ۱۳۵ آمده است).
عدد زیر را در نظر بگیرید

$$N = 0258654139889732$$

اگر این عدد را به‌دقت از طرف چپ بررسی کنیم، معلوم می‌شود که رقم‌هایش شامل شش رشته صعودی و نزولی‌اند که به‌دنبال هم آمده‌اند:

$$0258, 86541, 139, 98, 89, 9732$$



چون نمی‌خواهیم رشته‌های طولانی مثلاً دو یا بیش از دو رشته مجاور هم را بررسی کنیم، فقط رشته‌های ماکسیمال یعنی رشته‌هایی را که تا تغییر بعدی امتداد دارند در نظر می‌گیریم. این امر موجب می‌شود که هرگونه ابهامی درباره رشته موردنظر برطرف شود. از این پس چنین رشته‌های ماکسیمالی را «مسیر» می‌نامیم.

عددهایی مانند ۷۷۷۶۵۵۹۹۱۱ که رقم‌های تکراری دارند، پیچیدگی‌های ناخواسته‌ای وارد مسأله می‌کنند و به همین دلیل توجه خود را به آن اعداد طبیعی معطوف می‌کنیم که در آنها همواره رقم‌های مجاور متمایزند. سرانجام، همان‌طور که در مثال نخست دیدیم، اینکه رقم اول برابر با صفر باشد مجاز است. پرسش این است که «میانگین تعداد مسیرها در عددهای n رقمی از این نوع چقدر است؟»

راه حل

راه حل زیبای زیر از همکارم یان گولدن (در دانشگاه واترلو) است.

بدیهی است که تعداد عددهای n رقمی از این نوع برابر است با $N = 10 \times 9^{n-1}$. دلیل آن است که برای رقم اول 10 انتخاب وجود دارد ولی برای هر یک از رقمهای بعدی تنها 9 انتخاب وجود دارد، زیرا تکرارهای متوالی مجاز نیستند. بنابراین میانگین مطلوب برابر است با

$$A = \frac{T, \text{ تعداد کل مسیرها در این } N \text{ عدد صحیح}}{N} = \frac{T}{N}$$

اینک مسأله یافتن اطلاعاتی درباره T است.

از آنجا که به طور کلی ممکن است مسیر از هر جایی در طول عددی صحیح آغاز شود، در نتیجه راهی ساده برای محاسبه T این است که مجموع زیر را حساب کنیم

$$\begin{aligned} & (r_1, \text{ تعداد مسیرهایی که از رقم اول آغاز می شوند}) \\ & + (r_2, \text{ تعداد مسیرهایی که از رقم دوم آغاز می شوند}) \\ & + (r_3, \text{ تعداد مسیرهایی که از رقم سوم آغاز می شوند}) \\ & \dots \dots \dots \\ & + (r_n, \text{ تعداد مسیرهایی که از رقم } n \text{ام آغاز می شوند}) \end{aligned}$$

یعنی

$$T = r_1 + r_2 + \dots + r_n$$

با این نامگذاری

$$A = \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{N} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{N}$$

بدیهی است که r_i/N احتمال این است که عدد صحیحی که به طور تصادفی از میان N عدد مورد نظر ما انتخاب شده است مسیری داشته باشد که از محل i ام آغاز شده است. اگر این احتمال را با p_i نشان دهیم، میانگین مطلوب چنین خواهد بود

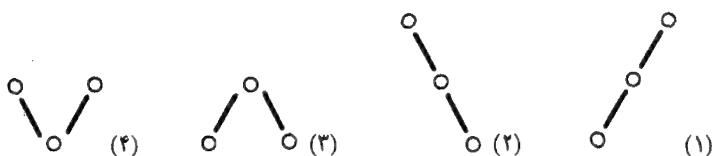
$$A = \sum_{i=1}^n p_i$$

بنابراین توجه خود را به محاسبه p_i ها معطوف می کنیم.

بدیهی است که $p_1 = 1$ ، زیرا رقم پیشرو همواره در ابتدای مسیری واقع است، و $p_n = 0$ ، زیرا رقم آخر هیچگاه در ابتدای مسیری قرار ندارد. مشکل در محلهایی است که درونی اند، ولی می توان این p_i ها را از رهیافت ابتکاری زیر تعیین کرد.

برای بررسی وضعیت در محل درونی دلخواهی مانند محل i ام، محلی را که قبل از آن و محلی را که بعد از آن واقع است در نظر بگیرید. نمودارهای زیر چهار ترتیب ممکن را نشان می دهند که

ممکن است رقمهای واقع در سه محل مجاور نسبت به هم قرار گیرند.



بنابراین رقم میانی که در محل ۱ام قرار دارد تنها در حالت‌های (۳) و (۴) ممکن است ابتدای یکی از مسیرها باشد و

$$p_i = \text{احتمال (۴)} + \text{احتمال (۳)}$$

محاسبه مستقیم این مقدار دشوار است، ولی با در نظر گرفتن احتمال متمم می‌توان این کار را به سادگی انجام داد:

$$p_i = [\text{احتمال (۲)} + \text{احتمال (۱)}] \\ = 1 - 2[\text{احتمال (۱)}]$$

زیرا بدیهی است که به دلیل تقارن حالت‌های (۱) و (۲) یک احتمال دارند.

از آنجا که سه رقم مربوط به حالت (۱) یکنوا صعودی‌اند، پس این سه رقم باید یکی از (1^3) مجموعه سه‌تایی باشند که اعضای متمایز دارند (تنها یک طریق برای مرتب کردن هریک از این مجموعه‌ها به شکل صعودی وجود دارد). تعداد راه‌های پر کردن سه مکان متوالی برابر با $10 \times 9 \times 8$ است (۱۰ راه برای پر کردن مکان اول و ۹ راه برای هریک از دو مکان دیگر وجود دارد). بنابراین

$$p_i = 1 - 2 \times \frac{(1^3)}{10 \times 9 \times 8} = 1 - \frac{2 \times 10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 10 \times 9 \times 8} = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

این نتیجه از نظر من غیرمنتظره است زیرا تصور نمی‌کردم که p_i به ازای هر $2 - n$ مکان درونی و به ازای هر n مقدار ثابتی باشد. در هر صورت میانگین مطلوب برابر است با

$$A = \sum_{i=1}^n p_i = 1 + (n-2)p_i + 0 \\ = 1 + \frac{26}{27}(n-2)$$

ملاحظات

از بحث بالا نتیجه می‌شود که در هر عدد صحیح ۲۹ رقمی به طور متوسط ۲۰ مسیر وجود دارد. این مقدار از نظر شخصی مثل من که در آمار آموزش ندیده است بسیار زیاد به نظر می‌رسد، زیرا طول میانگین حاصل از آن بسیار کوتاه و برابر با $1/45 = \frac{29}{27}$ رقم در هر مسیر است. از آنجا که مسیری وجود ندارد که شامل ۱/۴۵ رقم باشد و نیز همه مسیرها از مسیر میانگین طولانیتر نیستند، نتیجه

می‌شود که برخی از مسیرهایی که طولشان کوتاه‌تر از طول میانگین است، باید تنها یک رقم داشته باشند، که چنین چیزی ناممکن است. البته در محاسبه شتاب‌زده بالا این حقیقت را نادیده گرفته‌ایم که ۲۰ مسیر موردنظر در ۱۹ موضع به یکدیگر متصل‌اند و هریک از این موضعها در محاسبه طول مسیرها دو بار شمرده می‌شود، زیرا هریک از آنها یک‌بار انتهای مسیر و بار دیگر ابتدای مسیر بعدی است. بنابراین میانگین واقعی طول مسیرها برابر است با

$$\frac{29 + 19}{20} = \frac{48}{20} = 2,4$$

که مطمئناً عددی قابل قبول است ولی بازهم از نظر من چندان بزرگ نیست. با بررسی عددهای ۵۶ رقمی درمی‌یابیم که مقدار میانگین تعداد مسیرها برابر است با

$$1 + \frac{19}{27}(54) = 39$$

و میانگین طول حاصل از آن برابر می‌شود با

$$\frac{56 + 38}{39} = \frac{94}{39} = 2,410256...$$

پیشرفت نه‌چندان ارزشمندی که حاصل شد، ما را قانع می‌کند تا مستقیماً به سراغ حالت کلی برویم. به همان روش قبل معلوم می‌شود که میانگین طول مسیرها در عددهای n رقمی برابر است با

$$\frac{n + \frac{19}{27}(n-2)}{1 + \frac{19}{27}(n-2)} = \frac{48n - 38}{19n - 11} = \frac{48 - \frac{38}{n}}{19 - \frac{11}{n}}$$

که به تدریج به حد کوچک و نامیدکننده $\frac{48}{19} = 2,5263...$ میل می‌کند.

ممکن است مشکل ناشی از این باشد که معمولاً با در نظر گرفتن شکلهای زیگراگ این حقیقت فراموش می‌شود که ممکن نیست طول مسیرها بیشتر از ۱۰ رقم باشد. بدون شک این مطلب در پایین نگه‌داشتن میانگین طول مسیرها نقش مهمی ایفا می‌کند. البته می‌توانیم با در نظر گرفتن مبنای عددی دیگری کران بالاتری برای میانگین طول مسیرها به دست آوریم.

برای مثال در مبنای ۱۰۱،

$$\begin{aligned} p_i &= 1 - 2 \times \frac{\binom{101}{2}}{101 \times 1002} = 1 - \frac{2 \times 101 \times 100 \times 99}{3 \times 2 \times 101 \times 100 \times 100} \\ &= 1 - \frac{99}{3 \times 100} = 1 - \frac{33}{100} = \frac{67}{100} \end{aligned}$$

و میانگین تعداد مسیرها در عددهای ۱۰۰۲ رقمی برابر است با

$$1 + \frac{67}{100}(1000) = 671$$

بنابراین میانگین طول مسیرها در چنین عددهایی برابر می‌شود با

$$\frac{1002 + 670}{671} = \frac{1672}{671} = 2,4918...$$

این تنها گویای آن است که وضع شهود من در چنین مواردی بدتر از آن است که تصور می‌کردم. اینک بیاید به عددهای طولانیتری در مبناهای بزرگتری مانند b توجه کنیم، اگرچه ممکن است این کار موجب شود اندک اعتماد به نفسی که برایم باقی مانده است از بین برود. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} p_i &= 1 - 2 \times \frac{\binom{b}{2}}{b(b-1)^2} = 1 - \frac{2b(b-1)(b-2)}{3 \times 2 \times b(b-1)(b-1)} \\ &= 1 - \frac{b-2}{3(b-1)} = 1 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{b-1}\right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3(b-1)} \end{aligned}$$

با بزرگ شدن b ، مقدار آخرین عبارت رفته‌رفته کاهش می‌یابد و به $\frac{2}{3}$ میل می‌کند. بنابراین به‌ازای b های بزرگ، میانگین تعداد مسیرها تقریباً برابر با $1 + \frac{2}{3}(n-2)$ می‌شود که از آن نتیجه می‌گیریم میانگین طول مسیرها برابر است با

$$\frac{n + \frac{2}{3}(n-2)}{1 + \frac{2}{3}(n-2)} = \frac{5n-4}{2n-1} = \frac{5-\frac{4}{n}}{2-\frac{1}{n}}$$

که هیچ‌وقت از عدد جادویی $2\frac{1}{3}$ زیاد دور نمی‌شود.

۲. مسأله‌ای از بریتانیا

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۵۴؛ راه‌حل مشابهی در ۱۹۸۹، ۹ آمده است.)

موضوع این مسأله بسیار زیبا به خانواده‌ی خاصی از دنباله‌های نامتناهی از اعداد حقیقی مثبت مانند

$$\{x_i\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

مربوط می‌شود. به‌ازای دنباله‌های این خانواده، با مقادیر کسرهای

$$f_n = \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

سرکار داریم. به‌ازای دنباله‌ای ممکن است f_n بسیار بزرگ شود. برای مثال در مورد دنباله $\{1, 1, 1, \dots\}$ ،

$$f_n = \frac{1+1+\dots+1}{\sqrt{1+1+\dots+1}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

و با بزرگ شدن n ، f_n به ∞ میل می‌کند. مثال دیگری از این نوع که به‌روشنی مثال قبل نیست، دنباله $\{1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots\}$ است.

با وجود این اگر بحث خود را به دنباله‌هایی محدود کنیم که در آنها هر جمله همیشه دست‌کم برابر با مجموع جمله‌های قبل از خود است، یعنی

$$x_n \geq x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

آنگاه مقدار f_n ها دور از دسترس نخواهد بود. در حقیقت صرفنظر از مقدار n یا دنباله‌ای از نوع موردنظر که با آن سروکار داریم، هیچ‌گاه مقدار f_n ها از عدد ثابتی چون c بزرگتر نمی‌شود. در این مسأله از ما خواسته شده است که c ، کوچکترین کران بالای همه f_n هایی را که از این خانواده خاص از دنباله‌ها به‌وجود آمده‌اند، تعیین کنیم.

راه حل

اگر مقدار c در این مسأله مشخص شده بود، بازهم باید ثابت می‌کردیم که این عدد واقعاً کوچکترین کران بالای f_n ها است. از آنجا که مقدار c معلوم نیست، پیش از پرداختن به مسأله اصلی، یعنی اثبات ویژگی مشخصه c ، مسئولیت مضاعف حدس زدن مقدار c نیز برعهده ماست. بدیهی است که بررسی هر حدس خاصی این شبهه را به همراه دارد که ممکن است تمام این کار به‌در دادن وقت باشد. مطمئناً این وضعیت جذابیت مسأله را بیشتر می‌کند و بی‌تردید ما را وادار می‌سازد که تنها حدسهایی را در نظر بگیریم که تا حد زیادی امیدوارکننده باشند.

شرط داده شده، $x_n \geq x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$ ، مقادیر ممکن x_n را تا حد زیادی کاهش می‌دهد. به‌نظر می‌رسد فاصله‌ای که بین مقدار واقعی x_n و کمترین مقدار ممکن آن، یعنی $x_1 + \dots + x_{n-1}$ ، وجود دارد، تأثیر مهمی بر مقدار f_n دارد. از این رو می‌توانیم بپذیریم دنباله‌هایی که در آنها این فاصله‌ها اکسترم هستند، نظیر مجموعه‌ای از f_n های اکسترم هستند، و این نتیجه راهنمای ما برای تعیین مقدار دقیق c است. بنابراین دنباله‌ای را در نظر می‌گیریم که کاملاً «فشرده» است، به این معنا که پس از x_1 ، هریک از x_n ها تا حد ممکن کوچک است؛ به عبارت دیگر، همواره x_n برابر با $x_1 + \dots + x_{n-1}$ است. برای مثال دنباله زیر را در نظر می‌گیریم

$$\{1, 1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^k, \dots\}$$

(یادآوری می‌کنیم $2^k - 1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{k-1}$). در مورد این دنباله

$$f_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{8} + \dots + \sqrt{2^{n-2}}}{\sqrt{1 + 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-2}}}$$

یعنی

$$f_n = \frac{1 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \dots + \sqrt{2^{n-2}}}{\sqrt{2^{n-1}}}$$

اگر n فرد باشد، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} f_{2k+1} &= \frac{1 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{8} + \sqrt{16} + \dots + \sqrt{2^{2k-2}} + \sqrt{2^{2k-1}}}{\sqrt{2^{2k}}} \\ &= \frac{1 + (1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1}) + \sqrt{2}(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1})}{2^k} \\ &= \frac{1 + (2^k - 1) + \sqrt{2}(2^k - 1)}{2^k} = 1 + \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

بنابراین، وقتی که $k \rightarrow \infty$ ، $f_{2k+1} \rightarrow 1 + \sqrt{2}$.
اگر n زوج باشد، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} f_{2k+2} &= \frac{1 + 1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{2^{2k-1}} + \sqrt{2^{2k}}}{\sqrt{2^{2k+1}}} \\ &= \frac{1 + (1 + 2 + \dots + 2^k) + \sqrt{2}(1 + 2 + \dots + 2^{k-1})}{2^k \sqrt{2}} \\ &= \frac{1 + (2^{k+1} - 1) + \sqrt{2}(2^k - 1)}{2^k \sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} + \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

و باز هم وقتی که $k \rightarrow \infty$ ، $f_{2k+2} \rightarrow \sqrt{2} + 1$. بنابراین اینکه حدس بزیم $c = 1 + \sqrt{2}$ ، که حاصل بررسی دنباله‌ای با مقادیر اکسترمم است، به هیچ وجه حساب نشده نیست و ارزش آن را دارد که برای اثبات معتبر بودنش کوشش زیادی به عمل آوریم. می‌دانیم f_n مقداری را می‌گیرد که به اندازه دلخواه به $1 + \sqrt{2}$ نزدیک‌اند. حال اگر بتوانیم ثابت کنیم که f_n هرگز بزرگتر از $1 + \sqrt{2}$ نمی‌شود نتیجه مطلوب را به دست آورده‌ایم.
بدیهی است که

$$f_1 = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}} = 1 \leq 1 + \sqrt{2}$$

به نظر می‌رسد که استقرا رهیافت مناسبی برای حل این مسأله باشد. بنابراین فرض کنید

$$f_{n-1} = \frac{\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_{n-1}}}{\sqrt{x_1 + \dots + x_{n-1}}} \leq 1 + \sqrt{2} \quad (\text{الف})$$

می‌خواهیم ثابت کنیم

$$f_n = \frac{\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{x_1 + \dots + x_n}} \leq 1 + \sqrt{2}$$

با توجه به (الف)،

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \geq \left(\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_{n-1}}}{1 + \sqrt{2}} \right)^2$$

از اینجا به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} f_n &\leq \frac{\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{\left[\frac{\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_{n-1}}}{1 + \sqrt{2}} \right]^2 + x_n}} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n})}{\sqrt{(\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_{n-1}})^2 + (1 + \sqrt{2})^2 x_n}} \end{aligned}$$

بنابراین اگر بتوانیم ثابت کنیم

$$\frac{\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{(\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_{n-1}})^2 + (1 + \sqrt{2})^2 x_n}} \leq 1$$

یعنی ثابت کنیم

$$(\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_{n-1}}) + \sqrt{x_n} \leq \sqrt{(\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_{n-1}})^2 + (1 + \sqrt{2})^2 x_n}$$

آنگاه نتیجه مطلوب، $f_n \leq 1 + \sqrt{2}$ ، به دست می‌آید. با مجذور کردن دو طرف نابرابری بالا معلوم می‌شود که این نابرابری معادل است با

$$\begin{aligned} (\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_{n-1}})^2 + 2\sqrt{x_n}(\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_{n-1}}) + x_n \\ \leq (\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_{n-1}})^2 + (3 + 2\sqrt{2})x_n \end{aligned}$$

و یا

$$2\sqrt{x_n}(\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_{n-1}}) \leq (2 + 2\sqrt{2})x_n$$

$$\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_{n-1}} \leq (1 + \sqrt{2})\sqrt{x_n}$$

ولی

$$x_n \geq x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$$

و بنابراین

$$\sqrt{x_n} \geq \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}} \quad (\text{ب})$$

اینک با توجه به فرض استقرا، (الف)، به دست می‌آوریم

$$\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_{n-1}} \leq (1 + \sqrt{2})\sqrt{x_1 + \dots + x_{n-1}}$$

در نتیجه بنابر (ب) نابرابری مطلوب را به دست می‌آوریم

$$\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_{n-1}} \leq (1 + \sqrt{2})\sqrt{x_n}$$

از آنجا که می‌توانیم تمام مراحل این استدلال را معکوس کنیم، از استقرا نتیجه می‌شود که به ازای هر n و در مورد همه دنباله‌ها، f_n از $1 + \sqrt{2}$ بزرگتر نیست و چون، با توجه به آنچه در مورد دنباله $\{1, 1, 2, 4, 8, \dots, 2^k, \dots\}$ ثابت شد، می‌توان f_n را به اندازه دلخواه به $1 + \sqrt{2}$ نزدیک کرد، نتیجه می‌گیریم که کوچکترین کران بالای مورد نظر، یعنی c ، واقعاً برابر با $1 + \sqrt{2}$ است.

۳. مسأله‌ای از ایسلند

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۷۸؛ راه حل دیگری در ۱۹۸۹، ۱۳۳ آمده است.)

پنج عدد مختلف را یکی یکی و به تصادف از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ انتخاب می‌کنیم و پس از انتخاب

هر عدد آن را به مجموعه باز نمی‌گردانیم. ثابت کنید احتمال اینکه بتوان با نخستین سه عدد انتخاب شده، و نیز پنج عدد انتخاب شده، تصاعدی حسابی ساخت بزرگتر از $\frac{6}{(n-4)^3}$ است.

راه حل

ابتدا تعداد تصاعدهای حسابی ۵ جمله‌ای را که قدرنسبتشان برابر با عدد طبیعی d است حساب می‌کنیم. اگر جمله اول یکی از این تصاعدها a باشد، جمله پنجم آن، $a + 4d$ ، نباید بزرگتر از n باشد، یعنی

$$a + 4d \leq n, \quad a \leq n - 4d$$

به بیان دیگر می‌توان جمله اول را یکی از عددهای ۱، ۲، ... و $n - 4d$ انتخاب کرد، و در نتیجه تعداد چنین تصاعدهایی برابر با $n - 4d$ است.

اینک مقادیر ممکن d را بررسی می‌کنیم. از شرط $a + 4d < n$ نتیجه می‌شود

$$d \leq \frac{n-a}{4}$$

و چون a باید دست‌کم برابر با ۱ باشد، در هر حالت

$$d \leq \frac{n-1}{4}$$

چون d عددی صحیح است، نتیجه می‌شود

$$d \leq \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor$$

که در اینجا گروه جزء صحیح را مشخص می‌کند.

بهتر است جانب احتیاط را نگه داریم و ببینیم که آیا بزرگترین مقدار d ، یعنی $\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor$ ، همواره قابل قبول است یا خیر. به‌ازای $a = 1$

$$1 + 4 \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor \leq 1 + 4 \times \frac{n-1}{4} = n$$

پس معلوم می‌شود که می‌توان d را یکی از عددهای صحیح زیر انتخاب کرد

$$1, 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor$$

بنابراین تعداد کل تصاعدهای حسابی ۵ جمله‌ای مانند $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ در مجموعه

$\{1, 2, \dots, n\}$ برابر است با

$$\begin{aligned} S &= \sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor} (n - 4d) \\ &= n \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor - 4 \left(1 + 2 + \dots + \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= n \left[\frac{n-1}{4} \right] - 2 \left[\frac{n-1}{4} \right] \left(\left[\frac{n-1}{4} \right] + 1 \right) \\
 &= \left[\frac{n-1}{4} \right] \left(n - 2 \left[\frac{n-1}{4} \right] - 2 \right)
 \end{aligned}$$

اینک هنگامی که بتوانیم عددهای انتخاب شده را به صورت تصاعدی حسابی و ۵ جمله‌ای مانند $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ مرتب کنیم، برای اینکه بتوان اولین سه عدد انتخاب شده را نیز به صورت تصاعدی حسابی مرتب کرد، این سه عدد باید یکی از چهار مجموعه زیر را تشکیل دهند

$$\{t_1, t_2, t_3\}, \{t_2, t_3, t_4\}, \{t_3, t_4, t_5\}, \{t_1, t_3, t_5\}$$

برای مثال مجموعه $\{t_1, t_2, t_3\}$ را می‌توان به $6 = 3!$ روش مختلف (برحسب ترتیب اعضایش) انتخاب کرد و دو عدد آخر یعنی t_4 و t_5 را نیز می‌توان به هر ترتیب دلخواهی انتخاب کرد. بنابراین برای انتخاب مجموعه $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ ، به طوری که اولین سه عدد انتخاب شده به ترتیبی عددهای t_1, t_2, t_3 باشند، $12 = 6 \times 2$ روش مختلف وجود دارد. به همین ترتیب در مورد هریک از این چهار حالت؛ و مجموعاً $48 = 4 \times 12$ ترتیب وجود دارد که از آنها می‌توانیم S تصاعد انتخاب کنیم. به طوری که سه عدد اول آن را بتوان به صورت تصاعدی حسابی مرتب کرد. بنابراین از بین $(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n$ روش مختلفی که می‌توانیم پنج عدد از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ انتخاب کنیم، $48S$ حالت مطلوب وجود دارد، و در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با

$$P = \frac{48S}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

آنچه باقی مانده تخمین مقدار S است.

برای به دست آوردن $\left[\frac{n-1}{4} \right]$ ، جزء کسری $\frac{n-1}{4}$ را حذف می‌کنیم، و در نتیجه مقدار این عدد به اندازه یکی از عددهای $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ یا $\frac{3}{4}$ کاهش می‌یابد. در نتیجه $\left[\frac{n-1}{4} \right]$ با یکی از مقادیر زیر برابر است

$$\frac{n-1}{4}, \frac{n-2}{4}, \frac{n-3}{4}, \frac{n-4}{4}$$

مقادیر نظیر S در این حالتها برابرند با

$$\begin{aligned}
 \frac{n-1}{4} \left(n - 2 \left(\frac{n-1}{4} \right) - 2 \right) &= \frac{n^2 - n}{4} - \frac{n^2 - 2n + 1}{8} - \frac{n-1}{2} \quad (\text{الف}) \\
 &= \frac{n^2 - 4n + 3}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{n-2}{4} \left(n - 2 \left(\frac{n-2}{4} \right) - 2 \right) &= \frac{n^2 - 2n}{4} - \frac{n^2 - 4n + 4}{8} - \frac{n-2}{2} \quad (\text{ب}) \\
 &= \frac{n^2 - 4n + 4}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{n-3}{4} \left(n - 2 \left(\frac{n-3}{4} \right) - 2 \right) &= \frac{n^2 - 3n}{4} - \frac{n^2 - 6n + 9}{8} - \frac{n-3}{2} \quad (\text{ج}) \\
 &= \frac{n^2 - 4n + 3}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n-4}{4} \left(n-2 \left(\frac{n-4}{4} \right) - 2 \right) &= \frac{n^2-4n}{4} - \frac{n^2-8n+16}{8} - \frac{n-4}{2} \\ &= \frac{n^2-4n}{8} \end{aligned} \quad (د)$$

کوچکترین این عددها برابر است با

$$\frac{n^2-4n}{8} = \frac{n(n-4)}{8}$$

بنابراین در هر حالت

$$S \geq \frac{n(n-4)}{8}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{48 \times \frac{n(n-4)}{8}}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \\ &= \frac{6}{(n-1)(n-2)(n-3)} \end{aligned}$$

حال می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} (n-1)(n-3) &= n^2-4n+3 \\ &< n^2-4n+4 \\ &= (n-2)^2 \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\frac{1}{(n-1)(n-3)} > \frac{1}{(n-2)^2}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{6}{(n-1)(n-2)(n-3)} \\ &> \frac{6}{(n-2)^3} \end{aligned}$$

که همان نتیجه مطلوب است.

۴. مسأله‌ای از روسیه

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۳۰۹؛ راه‌حل دیگری در ۱۹۸۹، ۱۶۸ آمده است.)

فرض کنید $\tau(n)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد طبیعی n باشد. در این صورت

$$\tau(1) = 1, \tau(2), \tau(3) = 2, \tau(4) = 3, \dots$$

موضوع این مسأله مربوط به خانواده‌دنباله‌هایی مانند دنباله زیر است

$$n, \tau(n), \tau(\tau(n)), \tau(\tau(\tau(n))), \dots,$$

که در آن هر جمله‌ای که بعد از جمله اول آمده با تعداد مقسوم‌علیه‌های جمله قبل از آن برابر است. مثالی از این دنباله‌ها این دنباله است

$$540, 24, 8, 4, \dots$$

بدیهی است که چنین دنباله‌هایی را می‌توان از روی جمله اولشان که عددهایی طبیعی و بزرگتر از ۱ هستند کاملاً مشخص کرد.

در اینجا مسأله موردنظر شناسایی دنباله‌هایی از این خانواده است که شامل هیچ مربع کاملی نیستند.

راه حل

اگر تجزیه n به عددهای اول به صورت

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$$

باشد به آسانی معلوم می‌شود که

$$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$$

زیرا هر عددی به صورت

$$d = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$$

مقسوم‌علیه‌ی از n است اگر و تنها اگر هیچ‌یک از نماها، مانند b_i ، از نمای نظیرش، a_i ، در تجزیه n بزرگتر نباشد؛ یعنی اگر و تنها اگر

$$0 \leq b_i \leq a_i$$

بنابراین $(a_1 + 1)$ انتخاب برای b_1 ، و $(a_2 + 1)$ انتخاب برای b_2 وجود دارد و الی آخر؛ چون نحوه انتخاب b_i ها مستقل از یکدیگر است، دستور بالا به دست می‌آید.

اینک، $\tau(n)$ فرد است اگر و تنها اگر همه عاملهای آن، $(a_i + 1)$ ها، فرد باشند، یعنی اگر و تنها اگر همه a_i ها زوج باشند. بنابراین نتیجه مهمی که به دست می‌آوریم این است که $\tau(n)$ فرد است اگر و تنها اگر n مربع کامل باشد. بنابراین اگر یکی از دنباله‌های موردنظر ما جمله فردی داشته باشد، جمله قبل از آن مربع کاملی ترسناک خواهد بود. البته جمله‌ای قبل از جمله اول وجود ندارد، بنابراین اینکه دنباله‌ای با عددی فرد آغاز شود جایز است. از اینکه بگذریم، در اینجا دوری کردن از مربعهای کامل دوری کردن از عددهای فرد است.

اینک ویژگی مهمی از $\tau(n)$ را ثابت می‌کنیم:

$$\tau(n) < n, \quad n > 2$$

اگر d مقسوم‌علیه‌ی از n باشد، مثلاً k بار در n جای می‌گیرد و می‌توان نوشت $dk = n$. در این صورت k نیز مقسوم‌علیه‌ی از n و (d, k) جفتی از مقسوم‌علیه‌های متمم است. اینک بدیهی است که d و k

هر دو از \sqrt{n} بیشتر نیستند، زیرا در غیر این صورت dk بزرگتر از n می‌شود. از طرف دیگر هر دو آنها از \sqrt{n} کوچکتر نیز نیستند، زیرا در غیر این صورت $dk < n$. بنابراین در هر جفت از مقسوم‌علیه‌های متمم نابرابر، به‌ناچار یکی باید از \sqrt{n} کمتر و دیگری باید از \sqrt{n} بیشتر باشد. البته در حالتی که n مربع کامل باشد، \sqrt{n} خودش مقسوم‌علیهی خود-متمم است. (در اینجا توجه می‌کنیم که چون عموماً مقسوم‌علیه‌ها جفت‌جفت‌اند و ممکن است مقسوم‌علیه اضافی \sqrt{n} نیز به آنها افزوده شود، می‌توانیم برهان دیگری از این نتیجه به‌دست آوریم که $\tau(n)$ فرد است اگر و تنها اگر n مربع کامل باشد.) حال از آنجا که هر جفت متمم لزوماً شامل عدد صحیحی است که از \sqrt{n} بزرگتر نیست، در صورتی که جفت خود-متمم (\sqrt{n}, \sqrt{n}) را نیز به حساب آوریم، بیش از $[\sqrt{n}]$ (جزء صحیح \sqrt{n}) جفت از آنها وجود ندارد. در نتیجه به‌ازای هر n

$$\tau(n) \leq 2[\sqrt{n}]$$

اینک اگر n مربع باشد، \sqrt{n} مقسوم‌علیه است، ولی سهم جفت (\sqrt{n}, \sqrt{n}) در $\tau(n)$ به‌جای ۲ واحد فقط ۱ واحد است و در نتیجه

$$\tau(n) \leq 2[\sqrt{n}] - 1 < 2\sqrt{n}$$

اگر n مربع نباشد، آن‌وقت \sqrt{n} عددی صحیح نیست و در نتیجه $[\sqrt{n}] < \sqrt{n}$ و باز هم

$$\tau(n) \leq 2[\sqrt{n}] < 2\sqrt{n}$$

بنابراین به‌ازای هر n ، $\tau(n) < 2\sqrt{n}$.

حال بدیهی است که به‌ازای $n > 4$ ، $n < n \times n$ ، $4n < n$ و $2\sqrt{n} < n$ ، و در نتیجه $\tau(n) < n$. ولی نابرابری $\tau(n) < n$ وقتی که $n = 3, 4$ نیز برقرار است (زیرا $\tau(3) = 2 < 3$ و $\tau(4) = 3 < 4$). پس سر آخر

$$\tau(n) < n, \quad n > 2$$

بنابراین دنباله $n, \tau(n), \tau(\tau(n)), \dots$ تا جایی که جمله‌هایش بزرگتر از ۲ هستند اکیداً نزولی است. ولی هیچ دو جمله‌ای در این دنباله از ۲ کوچکتر نیست. تنها عدد طبیعی که فقط یک مقسوم‌علیه دارد عدد ۱ است و فقط زمانی در دنباله ۱ داریم که جمله قبل آن نیز ۱ باشد؛ در نتیجه، تنها دنباله‌ای که شامل عدد ۱ است دنباله $(1, 1, 1, \dots)$ است. چون دنباله‌های ما با n آغاز می‌شوند و $n > 1$ ، کوچکترین عضو ممکن آنها ۲ است و چون خودشان تا جایی اکیداً نزولی‌اند، این ویژگی مهم به‌دست می‌آید که در هر دنباله نهایتاً باید به عدد ۲ برسیم و پس از آن، به دلیل اینکه $\tau(2) = 2$ ، این جمله به‌طور نامحدودی تکرار می‌شود.

حال بدیهی است که $\tau(n) = 2$ اگر و تنها اگر n عددی اول باشد. بنابراین در دنباله‌هایی که با عدد اولی مانند p آغاز می‌شوند، امکان اینکه مربع کاملی وجود داشته باشد نیست:

$$p, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots$$

ثابت خواهیم کرد که این‌گونه دنباله‌ها تنها دنباله‌هایی هستند که ویژگی موردنظر را دارند.

فرض کنید جمله اول دنباله‌ای عددی صحیح و مرکب مانند n باشد. در این صورت $n \geq 4$ و چون n اول نیست، $\tau(n)$ برابر با ۲ نیست، و در نتیجه تکراری بی‌پایان ۲ها دست‌کم پیش از جمله سوم آغاز نمی‌شود. همان‌طور که معلوم شد، تنها راهی که ممکن است ۲ ظاهر شود این است که جمله پیش از آن عددی اول باشد. البته ممکن است این جمله قبلی ۲ دیگری باشد، ولی جمله‌ای که بلافاصله پیش از اولین ۲ قرار دارد باید عددی اول و فرد باشد. چون این عدد فرد است، جمله قبلی‌اش چیزی جز مربعی کامل نیست. از این‌رو در دنباله‌ای که پس از سه جمله یا بیشتر به اولین ۲ می‌رسد، وجود مربعی کامل حتمی است.

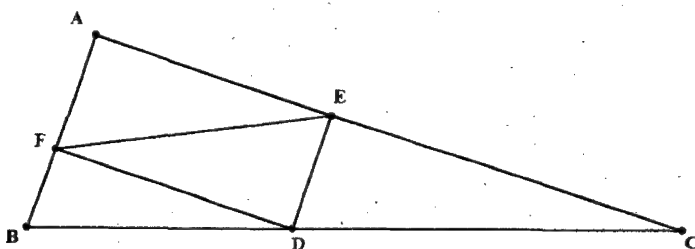
...، اولین ۲، عدد اول فرد، مربع کامل، ...

از آنجا که n هایی که عدددهایی اول‌اند تنها مقادیری هستند که به‌ازای آنها دنباله ۲ها زودتر آغاز می‌شود، بنابراین فقط آنها هستند که دنباله‌های خالی از مربع را در خانواده موردنظر ایجاد می‌کنند.

۵. مسأله‌ای از فرانسه

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۴۶)

گاهی طرز ارائه مسأله‌ای ناخودآگاه فریبان می‌دهد. برای مثال مسأله زیر را در نظر بگیرید.



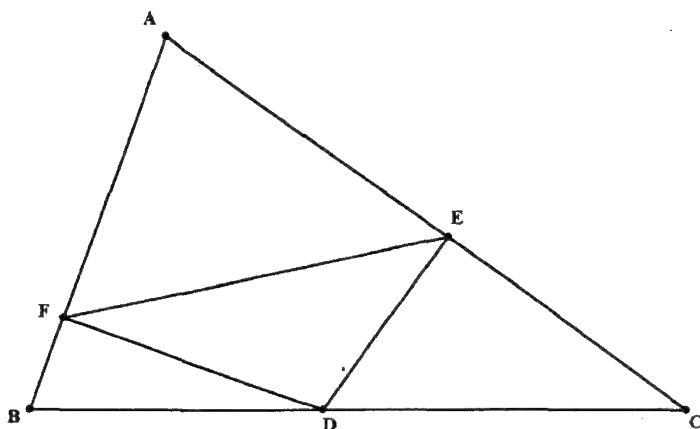
شکل ۱۳

از نقطه D روی وتر BC از مثلث قائم‌الزاویه ABC ، عمودهای DE و DF را به ترتیب بر ضلعهای AC و AB رسم می‌کنیم. جای D را طوری تعیین کنید که طول EF مینیم شود.

روشن است که $AFDE$ مستطیل است و می‌توانیم به جای EF قطر دیگر مستطیل یعنی AD را در نظر بگیریم. بدیهی است که وقتی D پای ارتفاع نظیر رأس A باشد، طول AD مینیمم و از اینجا معلوم می‌شود که در حقیقت مسأله چقدر ساده است.

در این مثال همه چیز به این مطلب بستگی دارد که $\angle A$ زاویه‌ای قائمه است، زیرا در این صورت همواره قطرهای EF و AD برابرند. در صورتی که $\angle A$ قائمه نباشد کار به این سادگی نیست. احتمالاً

تا اینجا با این مثال آنقدر گمراه شده‌اید که بتوانم مسأله‌ای را که از سوی فرانسه پیشنهاد شد و از آن استفاده نشد مطرح کنم.



شکل ۱۴

در مثلث نامشخص ABC ، D کجا باشد تا EF مینیمم شود؟

راه حل

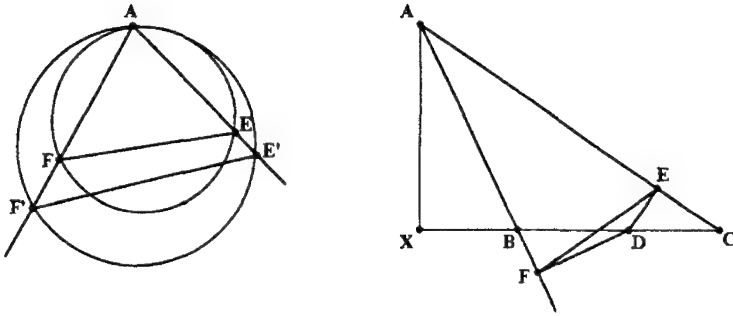
با کمال تعجب، پاسخ همان پاسخ قبل است: D باید پای ارتفاع نظیر رأس A باشد؛ زیرا بازهم AD کمترین طول را دارد. با وجود این، در این حالت ارتباط بین AD و EF مانند قبل کاملاً روشن نیست. در حقیقت نکته مهم در این مثال این نیست که $AFDE$ مستطیل است، بلکه این است که $AFDE$ همواره محاطی است. نقطه D هر جایی روی BC باشد، همواره EF مقابل به زاویه‌ای محاطی، یعنی $\angle A$ ، است. ولی بدیهی است که هر چه دایره محاطی کوچکتر باشد وتر EF نیز کوچکتر می‌شود (شکل ۱۵). از آنجا که زاویه‌های E و F قائمه‌اند، نتیجه می‌گیریم که AD قطری از دایره است. پس در صورتی دایره کوچکترین اندازه است که AD کوچکترین اندازه باشد.

اگر حرکت D روی BC فراتر از B یا C مجاز نباشد، و اگر یکی از زاویه‌های B و C منفرجه باشد، بازهم این نحوه استدلال درست است، اما در این حالت کوچکترین دایره هنگامی به دست می‌آید که D در رأس زاویه منفرجه قرار گیرد.

۶. مسأله‌ای از بلغارستان

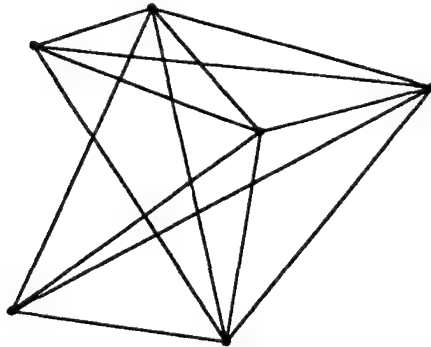
(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۳۰۹)

فرض کنید n نقطه روی صفحه انتخاب شده‌اند و پاره‌خطهایی بین برخی از آنها رسم شده است،



شکل ۱۵

به طوری که به هر ترتیبی که ۴ نقطه از آنها انتخاب کنیم، پاره خطهایی که ۳ نقطه از این ۴ نقطه را به هم وصل می کنند مثلی بسازند. کمترین تعداد پاره خطهای لازم برای رسیدن به این هدف چیست و چگونه می توانیم این پاره خطها را در این حالت مینیم تعیین کنیم؟



شکل ۱۶

راه حل

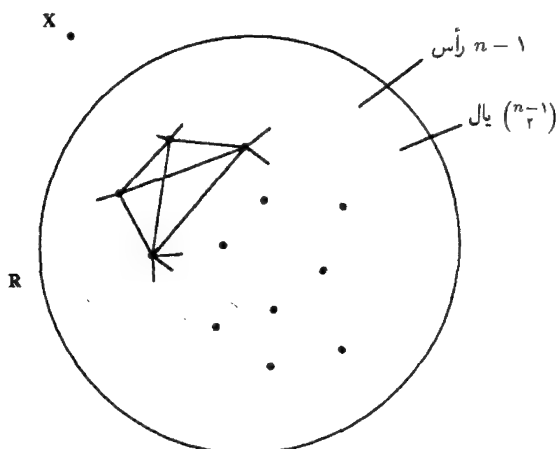
بدیهی است که می توانیم پیکربندی حاصل را به صورت گرافی در نظر بگیریم که در آن n نقطه مورد نظر رأسها و پاره خطهای رسم شده یالهای آن باشند. به این ترتیب مفید است که از برخی مفاهیم ساده نظریه گراف استفاده کنیم. یادآوری می کنیم که تعداد یالهای مجاور به رأسی مانند v را درجه v می نامیم و آن را به $d(v)$ نشان می دهیم. همچنین چون هر یال دو سر دارد، پس سهم یال در درجه رأسهای دو سرش ۱ واحد است. از اینجا نتیجه می شود که مجموع درجه های همه رأسها صرفاً تعداد دو سر یالها، و بنابراین دقیقاً دو برابر تعداد یالها، e ، است؛ به عبارت دیگر

$$\sum d(v) = 2e$$

پس از مقداری آزمایش این طور به نظر می رسد که بهترین کاری که می توانیم در مورد برقراری

شرط مربوط به تشکیل مثلثها انجام دهیم این است که رأسی مانند X را کاملاً منفرد بگذاریم و هر تعداد یال ممکن را که می‌توانیم بین $n-1$ رأس دیگر، که مجموعه آنها را R می‌نامیم، قرار دهیم. برای این کار $\binom{n-1}{2} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ یال لازم است و بدیهی است که به این ترتیب وضعیت مطلوب حاصل می‌شود:

هر ۳ رأس از ۴ رأس R ، مثلثی می‌سازند و اگر X در بین ۴ رأسی باشد که انتخاب شده‌اند، ۳ رأس دیگر در R هستند و در نتیجه مثلثی مشخص می‌کنند.



شکل ۱۷

در حقیقت اگر این وضعیت حالتی مینیمم باشد، سؤال مربوط به چگونگی انتخاب یالها چیز بی‌ارزشی خواهد بود. می‌خواهیم ثابت کنیم که نمی‌توان این مسأله را با تعداد کمتری از $\binom{n-1}{2}$ یال حل کرد. بنابراین می‌کوشیم که از فرض نداشتن بیش از $\binom{n-1}{2} - 1$ یال به تناقض برسیم. اگر

$$e \leq \binom{n-1}{2} - 1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - 1$$

آنگاه

$$\sum d(v) = 2e \leq (n-1)(n-2) - 2 = n^2 - 3n$$

و

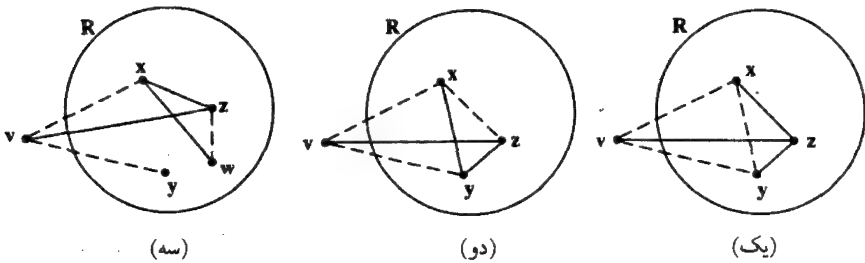
$$\text{درجهٔ میانگین} \leq \frac{1}{n}(n^2 - 3n) = n - 3$$

از آنجا که همهٔ درجه‌ها از مقدار میانگینشان بیشتر نیستند، به ازای رأسی مانند v

$$d(v) \leq n - 3$$

که در این صورت v دست‌کم به دو رأس دیگر مانند x و y متصل نیست. حتی اگر v به همه $n-3$ رأس دیگر بجز خودش، x و y متصل باشد، به سادگی می‌توان به این تناقض رسید که دست‌کم $(n-1)$ یال در گراف لازم است تا مطمئن باشیم که هر ۴ رأسی که انتخاب کنیم، ۳ تا از آنها رأسهای مثلثی هستند. فرض کنید R مجموعه $n-1$ رأس غیر از v باشد. اگر بین دو رأس از R یالی وجود نداشته باشد، سه حالت ساده زیر پیش می‌آید:

(یک) یال xy وجود ندارد،
 (دو) یالی مانند xz مجاور رأس x (یا معادلاً مجاور رأس y) وجود ندارد،
 (سه) یالی مانند wz که هیچ‌یک از دو انتهایش در x یا y واقع نیست وجود ندارد.



شکل ۱۸

بدیهی است که در حالت (یک) رأس چهارم، z ، هر چه باشد، چهارتایی (v, x, y, z) فاقد مثلث است. به همین ترتیب در حالت (دو) چهارتایی (v, x, y, z) و در حالت (سه) چهارتایی (v, x, z, w) شامل مثلث نیست. بنابراین نمی‌توانیم یالی از R حذف کنیم و در نتیجه تمامی $(n-1)$ یال ممکن باید وجود داشته باشند. به این ترتیب تناقض مورد نظر به دست می‌آید.

۷. مسأله‌ای از آلمان غربی

اینک توجه خود را به مسأله ترکیباتی جالبی که از سوی آلمان غربی پیشنهاد شده بود معطوف می‌کنیم. در صورتی که تنها رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را در اختیار داشته باشیم، چند عدد صحیح n رقمی وجود دارد که اختلاف رقمهای مجاور آنها دقیقاً برابر با ۱ است؟

راه حل

همواره در مسائلی از این قبیل عاقلانه این است که چند حالت نخست را به تفصیل بررسی کنیم:

اگر $n = ۱$ ، عددهای مورد نظر ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ هستند، و تعدادشان برابر با ۵ است.

اگر $n = ۲$ ، عددها ۱۲، ۲۱، ۲۳، ۳۲، ۳۴، ۴۳ و ۴۵ هستند، و تعدادشان

برابر با ۸ است.

اگر $n = 3$ ، عددها $۱۲۱, ۱۲۳, ۲۱۲, ۲۳۲, ۲۳۴, ۳۲۱, ۳۲۳, ۳۴۳, ۳۴۵$.

$۴۳۲, ۴۳۴, ۴۵۴, ۵۴۳$ و ۵۴۵ هستند، و تعدادشان برابر با ۱۴ است.

اگر تعداد عددهای صحیح n رقمی را با a_n و تعداد عددهایی از آنها را که به رقم i ختم می‌شوند با $a(n, i)$ نشان دهیم، بدیهی است که

$$a(n, 1) = a(n-1, 2)$$

$$a(n, 2) = a(n-1, 1) + a(n-1, 3)$$

$$a(n, 3) = a(n-1, 2) + a(n-1, 4)$$

$$a(n, 4) = a(n-1, 3) + a(n-1, 5)$$

$$a(n, 5) = a(n-1, 4)$$

به کمک نخستین مقادیری که در بالا در حالت‌هایی که $n = 1, 2, 3$ حاصل شدند، می‌توانیم جدول زیر را تا جایی که بخواهیم ادامه دهیم.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...	$2k+1$	$2k+2$	$2k+3$	$2k+4$
$a(n, 1)$	۱	۱	۲	۳	۶	۹	۱۸	...	$2 \times 3^{k-1}$	3^k	2×3^k	3^{k+1}
$a(n, 2)$	۱	۲	۳	۶	۹	۱۸	۲۷	...	3^k	2×3^k	3^{k+1}	$2 \times 3^{k+1}$
$a(n, 3)$	۱	۲	۴	۶	۱۲	۱۸	۳۶	...	$4 \times 3^{k-1}$	2×3^k	4×3^k	$2 \times 3^{k+1}$
$a(n, 4)$	۱	۲	۳	۶	۹	۱۸	۲۷	...	3^k	2×3^k	3^{k+1}	$2 \times 3^{k+1}$
$a(n, 5)$	۱	۱	۲	۳	۶	۹	۱۸	...	$2 \times 3^{k-1}$	3^k	2×3^k	3^{k+1}
a_n	۵	۸	۱۴	۲۴	۴۲	۷۲	۱۲۶	...				

بدیهی است که در این جدول نوعی تقارن وجود دارد به‌طوری‌که $a(n, 1) = a(n, 5)$ و $a(n, 2) = a(n, 4)$. با توجه به اینکه $a_1 = 5$ ، $a_2 = 14$ و $a_3 = 42$ ، حدس می‌زنم a_{k+1} همواره عددی کاتالان، یعنی به شکل $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ ، است، و برای این همه زیرکی به خودم تیریک می‌گویم. با وجود این، اینکه $a_7 = 126$ فوراً ناامیدم کرد زیرا عدد کاتالان بعدی ۱۳۲ است. به‌هرحال روشن است که جدول بالا اساساً از دو دنباله

$$1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, \dots, 3^k, 2 \times 3^k, \dots \quad (k \geq 0)$$

و

$$1, 2, 4, 6, 12, 18, 36, \dots, 4 \times 3^{k-1}, 2 \times 3^k, \dots \quad (k \geq 1)$$

تشکیل شده است.

اینک کار را به استقرا دنبال می‌کنیم. به عنوان فرض استقرا می‌پذیریم که به ازای عدد صحیحی مانند $k, k \geq 1$ ، ده درایه‌ای که در ستونهای $1 + 2k$ و $2 + 2k$ ی جدول آمده‌اند همگی درست‌اند. در این صورت می‌توانیم با استفاده از برابریهای بازگشتی در بالا تحقیق کنیم که درایه‌های ستونهای $3 + 2k$ و $4 + 2k$ هم‌نهایی هستند که در جدول آمده‌اند. از آنجا که این درایه‌ها و درایه‌های نظیرشان در ستونهای $1 + 2k$ و $2 + 2k$ یک شکل دارند و چون این درایه‌ها از روی درایه‌های ستونهای ۳ و ۴ پدید آمده‌اند، به کمک استقرا نتیجه می‌گیریم که دستورهای این ستونها به ازای هر $k, k \geq 1$ ، درست‌اند. بنابراین اگر درایه‌های ستونها را جمع کنیم، به سادگی نتیجه می‌شود که $a_1 = 5$ و به ازای $k, k \geq 0$ ،

$$a_{2k+2} = 8 \times 3^k$$

$$a_{2k+3} = 8 \times 3^k + 2 \times 3^{k+1}$$

از آنجا که این دستورها شباهت زیادی به هم دارند، می‌توانیم آنها را یکجا بنویسیم و دستور

$$a_n = 8 \times 3^{[(n-2)/2]} + (1 - (-1)^n) \times 3^{[n/2]}$$

را به دست آوریم که در آن کروشه نشانه «جزء صحیح» است.

۸. مسأله‌ای از استرالیا

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۷۶)

نقاط O_1 ، O_2 و O_3 مرکزهای سه دایره K_1 ، K_2 و K_3 هستند که از نقطه مشترک P می‌گذرند (شکل ۱۹). مطابق شکل، دومین نقطه برخورد این دایره‌ها عبارت‌اند از A ، B و C . از نقطه دلخواه X روی K_1 ، XA را امتداد می‌دهیم تا K_2 را در Y ، و XC را امتداد می‌دهیم تا K_3 را در Z قطع کند. ثابت کنید X را هر جایی روی K_1 انتخاب کنیم،

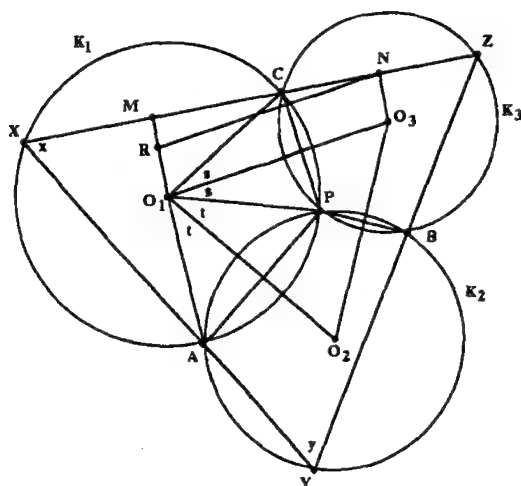
یک Y ، B و Z هم‌خط‌اند، و

(دو هیچ‌وقت مساحت $\triangle XYZ$ از چهار برابر مساحت مثلث مرکزی، $O_1O_2O_3$ ، بیشتر نمی‌شود.

راه‌حل

(یک) با انتخاب X روی K_1 جای Y روی K_2 تعیین می‌شود، و در صورتی که X و Y معین شوند، خطوط XC و YB مشخص می‌شوند. حال دایره K_3 را در Z قطع می‌کند و از ما خواسته شده است که ثابت کنیم YB نیز از این نقطه می‌گذرد. به عبارت دیگر می‌خواهیم ثابت کنیم XC و YB روی دایره K_3 با یکدیگر برخورد می‌کنند.

اینک اگر مطابق شکل اندازه زاویه‌های X و Y را x و y بگیریم، زاویه‌های مقابل آنها، $\angle CPA$ در K_1 و $\angle APB$ در K_2 ، مکملشان و برابرند با $180^\circ - x$ و $180^\circ - y$. بنابراین زاویه $\angle CPB$



شکل ۱۹

در K_3 برابر است با

$$360^\circ - (180^\circ - x) - (180^\circ - y) = x + y$$

و در نتیجه زاویه‌ای که در قسمتی از K_3 واقع است که در طرف دیگر وتر BC قرار دارد برابر با $180^\circ - (x + y)$ است. ولی چون زاویه‌های X و Y برابرند با x و y ، پس خطوط XC و YB هرجا که برخورد کنند مثلثی می‌سازند که زاویه رأس سوم آن برابر با $180^\circ - (x + y)$ است؛ به عبارت دیگر، وتر CB مقابل به زاویه‌ای است که در نقطه برخورد آنها قرار دارد و برابر با $180^\circ - (x + y)$ است. از آنجا که این مقدار به اندازه همان زاویه‌ای است که وتر BC در دایره K_3 جدا می‌کند، نتیجه می‌گیریم که XC و YB باید روی دایره K_3 با یکدیگر برخورد کنند و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

(دو) از آنجا که خط‌المركزين O_1O_2 عمود منصف وتر مشترک CP در دایره‌های K_1 و K_3 است، C تصویر آینه‌ای P روی O_1O_2 است. در نتیجه

$$\angle PO_1O_2 = \angle CO_1O_2$$

به همین ترتیب، قرینه P نسبت به O_1O_2 نقطه A است و

$$\angle PO_1O_2 = \angle AO_1O_2$$

بنابراین

$$\angle AO_1C = 2\angle O_2O_1O_2$$

ولی زاویه AO_1C که در K_3 روی وتر AC قرار دارد، دو برابر زاویه x است، یعنی اندازه زاویه‌ای که در

نقطه X روی دایره و مقابل به AC واقع است. در نتیجه در $\Delta O_1 O_2 O_3$ ،

$$\angle O_1 = x$$

به همین ترتیب

$$\angle O_2 = y$$

بنابراین مثلثهای XYZ و $O_1 O_2 O_3$ زاویه‌هایی برابر دارند و در نتیجه متشابه‌اند.

اینک مطابق شکل عمودهای $O_1 M$ و $O_3 N$ را بر XZ و NR را موازی با $O_1 O_3$ رسم می‌کنیم. در این صورت M و N وسط وترهای XC و CZ هستند و در نتیجه MN نصف XZ است. همچنین در متوازی‌الاضلاع $RO_1 O_2 N$ ، $RO_1 O_2 = RN$ که در آن RN وتر مثلث قائم‌الزاویه RMN است. در نتیجه

$$O_1 O_2 = RN \geq MN = \frac{1}{2} XZ$$

و

$$\frac{XZ}{O_1 O_2} \leq 2$$

(وقتی که XZ موازی $O_1 O_2$ باشد، مثلث RMN تباهیده است، و در این صورت $RN = MN$ و $XZ = 2O_1 O_2$).

بنابراین نسبت ضلعهای نظیر در این مثلثهای متشابه بزرگتر از ۲ نیست و چون نسبت مساحت مثلثهای متشابه با مجذور نسبت ضلعهای نظیر آنها متناسب است، نتیجه مطلوب به دست می‌آید:

$$\frac{\text{مساحت } \Delta XYZ}{\text{مساحت } \Delta O_1 O_2 O_3} \leq 2^2 = 4$$

۹. مسأله‌ای از فنلاند

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۳۰۹؛ راه‌حل مشابهی در ۱۹۸۹، ۱۶۵ آمده است.)

فرض کنید $A = \{a_1 < a_2 < a_3 < \dots\}$ دنباله‌ای نامتناهی و صعودی از عددهای طبیعی باشد که در آن تعداد مقسوم‌علیه‌های اول هریک از جمله‌ها، در صورتی که مقسوم‌علیه‌های مکرر را نیز به حساب بیاوریم، هیچ‌گاه بیشتر از ۱۹۸۷ نیست. ثابت کنید همواره می‌توانیم زیردنباله‌ای نامتناهی از A مانند

$$B = \{b_1 < b_2 < b_3 < \dots\}$$

انتخاب کنیم به طوری که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر جفت از جمله‌های آن عددی یکسان باشد.

راه‌حل

از آنجا که تعداد عددهای اول نامتناهی است، هرگز مقسوم‌علیه‌هایی که جمله‌های A را می‌سازند تمام نمی‌شود. اگر تعداد عددهای اولی که در ساختن a_i ها به کار رفته‌اند در مجموع برابر با عددی متناهی

مانند $n-1$ باشد، آنگاه برای گزینش هریک از ۱۹۸۷ مقسوم‌علیه‌ی که در ترکیب هر a_i ای وجود دارد، تنها n انتخاب داریم، و هریک از این مقسوم‌علیه‌ها یا یکی از این $n-1$ عدد اول است و یا عدد ۱، و به این ترتیب تنها امکان ساختن $n^{۱۹۸۷}$ جمله مختلف مانند a_i وجود دارد. بنابراین چون A نامتناهی است، پس باید بی‌نهایت عدد اول مختلف در ساختن آن به‌کار رود.

حال اگرچه هیچ عدد اولی بیش از ۱۹۸۷ بار در هیچ جمله‌ای تکرار نمی‌شود، ولی هر عدد اول ممکن است در سرتاسر دنباله A به دفعات دلخواه به‌کار رود. بدیهی است که در این صورت یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:

یا (یک) هیچ عدد اولی بی‌نهایت بار در عضوهای دنباله به‌کار نرفته است؛
و یا (دو) دست‌کم یک عدد اول بی‌نهایت بار در بین مقسوم‌علیه‌های a_i ها ظاهر شده است.
این حالتها را به‌ترتیب بررسی می‌کنیم.

حالت (یک). هیچ عدد اولی بی‌نهایت بار ظاهر نشده است: در این حالت صرف‌نظر از اینکه مقسوم‌علیه‌های اول a_1 که تعدادشان ۱۹۸۷ یا کمتر است چند بار در بقیه عضوهای دنباله تکرار شده‌اند، جمله‌ای چون a_i وجود دارد که شامل آخرین آنهاست. بنابراین هر جمله‌ای چون $a_j > a_i$ ، نسبت به a_1 اول است. به این ترتیب فرض می‌کنیم که دنباله مطلوب، B ، با جمله‌های b_1, b_2, \dots آغاز شود که b_2 یکی از این a_j ها است.

به همین ترتیب هیچ‌یک از مقسوم‌علیه‌های اول b_2 در جمله‌ای مانند a_i و جمله‌های پس از آن ظاهر نمی‌شود و از اینجا به بعد هر جمله‌ای مانند a_i نسبت به هر دو جمله b_1 و b_2 اول است. فرض کنید b_2 یکی از این a_i ها باشد. به این ترتیب با ادامه دادن این کار b_n را از جایی فراتر از جایی که از آن پس مقسوم‌علیه‌های اول b_{n-1} دیگر ظاهر نمی‌شوند انتخاب می‌کنیم. در این صورت هر جمله تازه‌ای مانند b_n در جایی فراتر از جایی که تا آنجا مقسوم‌علیه‌های اول جمله‌های قبلی، یعنی b_1, b_2, \dots, b_{n-1} ظاهر شده‌اند قرار دارد و بنابراین نسبت به هریک از آنها اول است. از اینجا نتیجه می‌شود که هر جفتی مانند (b_i, b_j) باید نسبت به هم اول باشند، زیرا یکی از دو جمله b_i و b_j باید قبل از دیگری باشد. به این ترتیب زیردنباله‌ای قابل قبول مانند B تولید می‌شود.

حالت (دو). دست‌کم یک عدد اول بی‌نهایت بار در عضوهای دنباله ظاهر شده است: هر عدد اول مانند p_1 که بی‌نهایت بار در عضوهای دنباله ظاهر شود باید در تعدادی نامتناهی از a_i ها ظاهر شود، زیرا ممکن نیست در هریک از آنها بیش از ۱۹۸۷ بار ظاهر شود. حال در تجزیه عبارتهایی که در آنها p_1 وجود دارد، نماهای مربوط به توانهایی مانند p_1^2 در محدوده متناهی $\{1, 2, \dots, 1987\}$ واقع‌اند و در نتیجه نمایی مانند r_1 باید بی‌نهایت بار تکرار شود. به عبارت دیگر بی‌نهایت جمله وجود دارد که در آنها p_1 ظاهر می‌شود و نمای توان p_1 در آنها یکسان و مثلاً برابر با r_1 است. اینک بقیه جمله‌های A را

حذف می‌کنیم و فقط زیردنباله A_1 را در نظر می‌گیریم که از جمله‌هایی تشکیل شده که تجزیه همه آنها به مقسوم‌علیه‌های اول شامل p_1 است.

در این صورت بدیهی است که در هر جمله A_1 عدد اول p_1 تا r_1 از ۱۹۸۷ مکان مقسوم‌علیه‌های آن عدد را اشغال می‌کند. اینک در مجموعه همه مقسوم‌علیه‌های اول دیگری که در A_1 وجود دارند، ممکن است عدد اول دیگری مانند p_2 نیز بی‌نهایت بار تکرار شود. اگر چنین باشد، آن وقت باید مانند آنچه در مورد p_1 گفتیم زیردنباله‌ای نامتناهی چون A_2 از A_1 وجود داشته باشد که در هر جمله‌اش p_2 دقیقاً با یک توان مثلاً $p_2^{r_2}$ ظاهر شود. در این حالت، باز هم توجه خود را به A_2 معطوف می‌کنیم. باز ممکن است بین مقسوم‌علیه‌های اول باقی‌مانده A_2 عدد اولی مانند p_3 بی‌نهایت بار ظاهر شود که ما را به زیردنباله دیگری مانند A_3 برساند که همه جمله‌هایش شامل حاصل ضرب $p_1^{r_1} p_2^{r_2} p_3^{r_3}$ باشند. ولی چنین p هایی محدودند، زیرا در هر جمله مانند a_j فقط ۱۹۸۷ مکان برای مقسوم‌علیه‌های اول وجود دارد. مقسوم‌علیه مرکب $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_i^{r_i}$ در هر جمله زیردنباله حاصل، A_i ، $r_1 + r_2 + \dots + r_i$ مکان را اشغال می‌کند. این کار باید پیش از اینکه همه ۱۹۸۷ مکان اشغال شوند پایان یابد، زیرا در غیر این صورت همه جمله‌های A_i برابر خواهند بود. بنابراین زمانی می‌رسد که دیگر هیچ عدد اولی به غیر از عدد‌های اول شناخته شده p_1, p_2, \dots, p_i بی‌نهایت بار در جمله‌های A_i تکرار نمی‌شود. اگر در اینجا مقسوم‌علیه مشترک $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_i^{r_i}$ را برابر با P بگیریم، می‌توانیم این A_i ی آخر را به صورت زیر بنویسیم

$$A_i = \{Pc_1 < Pc_2 < Pc_3 < \dots\}$$

در این حالت دنباله مقسوم‌علیه‌های کمی

$$C = \{c_1 < c_2 < c_3 < \dots\}$$

دنباله‌ای است که هر جمله‌اش حداکثر حاصل ضرب

$$1987 - (r_1 + r_2 + \dots + r_i)$$

مقسوم‌علیه اول است و هیچ مقسوم‌علیه اولی بی‌نهایت بار در آن تکرار نمی‌شود. بنابر حالت (یک) در بالا C شامل زیردنباله‌ای نامتناهی مانند

$$\{c_1 < c_j < c_k < \dots\}$$

است که در آن هر جفت از جمله‌ها نسبت به هم اول‌اند. بالاخره B ، زیردنباله نظیر آن از A_i که به صورت زیر است

$$B = \{Pc_1 < Pc_j < Pc_k < \dots\}$$

این ویژگی را دارد که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر جفت از جمله‌هایش، مانند (Pc_s, Pc_t) ، عددی یکسان و برابر با P است.

دو مسأله از المپیاد امریکا، ۱۹۸۸

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۱۶۴)

مسأله ۱

فرض کنید S مجموعه $\{1, 2, \dots, 20\}$ باشد و هر زیرمجموعه ۹ عضوی S با عضوی از S برچسب‌گذاری شده باشد. بنابراین برای مثال

ممکن است برچسب مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ، ۴،
برچسب مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ هم ۴،
و برچسب مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11\}$ ، ۱۷ باشد، والی آخر.

مجموعه S ، $167960 = (1^0)$ زیرمجموعه ۹ عضوی مختلف دارد و در نتیجه هر برچسب به‌طور میانگین ۸۳۹۸ بار به‌کار می‌رود.

ثابت کنید هرطور که این برچسب‌گذاریها را انجام داده باشیم، همواره زیرمجموعه‌ای ۱۰ عضوی از S مانند T با این ویژگی وجود دارد که

هیچ عضو T برچسب زیرمجموعه‌ای که از ۹ عضو دیگرش ساخته می‌شود نیست.

راه حل

در تلاش برای حل کردن این مسأله دریافتیم که بین رهیافتهای مستقیم و غیرمستقیم سردرگم شده‌ام؛ یکی پس از دیگری ناکامی در ساختن مستقیم T به‌وسیله جاگذاری عضوهای ناهمگون و نیز در رسیدن به تناقض با فرض عدم وجود T . راه حل کوتاه زیر ممکن است این احساس را ایجاد می‌کند که مسأله فوق‌العاده ساده است. ولی این احساس بسیار گمراه‌کننده است، زیرا مدت زیادی طول کشید تا

توانستم به این دیدگاه روشن‌گر دست پیدا کنم.

نهایتاً به‌روش برهان خلف فرض کنید T وجود ندارد. در این حالت هر زیرمجموعهٔ ۱۰ عضوی مانند A دست‌کم یک عضو مانند x دارد که برچسب مربوط به زیرمجموعهٔ X متشکل از ۹ عضو دیگر A است. از این رو فرض کنید مجموعهٔ M از همهٔ $\binom{X}{9}$ تا زیرمجموعهٔ ۱۰ عضوی S تشکیل شده باشد که به شکل $(X; x)$ نوشته شده‌اند و در آنها x برچسب مربوط به زیرمجموعهٔ ۹ عضوی X است:

$$M = \{(X; x), (Y; y), (Z; z), \dots\}$$

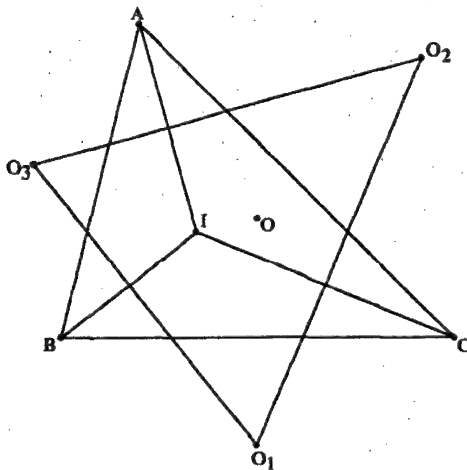
حال S تنها $\binom{X}{9}$ زیرمجموعهٔ ۹ عضوی دارد و چون بزرگترین جملهٔ ضریبهای دوجمله‌ای به‌شکل $\binom{X}{9}$ جملهٔ وسطی آنها یعنی $\binom{X}{9}$ است، پس تعداد زیرمجموعه‌های ۱۰ عضوی بیش از تعداد زیرمجموعه‌های ۹ عضوی است. بنابراین دو زیرمجموعه در M مانند A و B وجود دارند که یک زیرمجموعهٔ ۹ عضوی مانند X را نمایش می‌دهند:

$$A = (X; x), \quad B = (X; y)$$

چون A و B متفاوت‌اند، پس x و y دو برچسب مختلف هستند که به یک مجموعهٔ ۹ عضوی مربوط می‌شوند، و به این ترتیب به تناقضی رسیدیم که راه‌حل را تمام می‌کند.

مسألة ۲

فرض کنید از I مرکز دایرهٔ محاطی $\triangle ABC$ سه پاره‌خط به رأسهای آن وصل کرده‌ایم تا مثلث به سه مثلث کوچکتر افراز شود. اگر O_1, O_2, O_3 مرکز دایره‌های محیطی این مثلثهای کوچک باشند، ثابت کنید دایره‌های محیطی مثلثهای $O_1O_2O_3$ و ABC هم‌مرکزاند؛ به عبارت دیگر، مرکز دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ ، نقطهٔ O ، مرکز دایرهٔ محیطی $\triangle O_1O_2O_3$ نیز هست.



شکل ۲۰

راه حل

از آنجا که I مرکز دایره محاطی $\triangle ABC$ است، پاره خطهایی که I را به رأسهای مثلث وصل می کنند زاویه های مثلث را نصف می کنند. بنابراین در $\triangle IAB$ مجموع زاویه های A و B برابر با $\frac{1}{2}(A+B)$ است و

$$\frac{1}{2}(A+B) < \frac{1}{2}(A+B+C) = 90^\circ$$

و در نتیجه زاویه I منفرجه است. حال می دانیم که مرکز دایره محیطی مثلث منفرجه بیرون مثلث است و در نتیجه، مطابق شکل، O_2 بیرون $\triangle ABC$ است. در مورد O_1 و O_2 نیز نتایج مشابهی درست است. این مطلب برای حل این مسأله اساسی نیست ولی کارها را ساده تر می کند.

از آنجا که مرکز دایره محیطی مثلث روی عمود منصف هر یک از ضلعهای آن قرار دارد، پس O_1 و O_2 هر دو روی عمود منصف BC هستند و در نتیجه OO_1 حقیقتاً عمود منصف BC است. به همین ترتیب OO_2 و O_1O_2 به ترتیب عمود منصفهای AB و IB هستند. اگر نقاط برخورد را مطابق شکل ۲۱ نامگذاری کنیم، از برابری زاویه های متقابل به رأس در D نتیجه می شود که زاویه های B و O_1 در مثلثهای قائم الزاویه DO_1E و DBF برابرند و

$$\angle O_1 = \frac{1}{2}\angle B$$

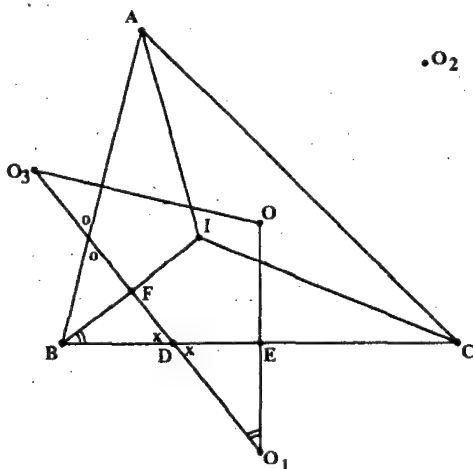
به همین ترتیب

$$\angle O_2 = \angle B \text{ دیگر نصف}$$

و از این نتیجه می شود

$$\angle O_1 = \angle O_2$$

و در نتیجه OO_1 و OO_2 ساقهای برابر مثلث متساوی الساقین OO_1O_2 هستند. به همین ترتیب ثابت می شود $OO_1 = OO_2 = OO_3$ که در نتیجه $OO_1 = OO_2 = OO_3$ و حکم نتیجه می شود.



شکل ۲۱

مسأله‌ای از المپیاد بین‌المللی، ۱۹۸۸

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۱۹۷)

ثابت کنید مجموعه اعداد حقیقی مانند x که در نابرابری

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

صدق می‌کنند اجتماع بازه‌های مجزایی است که مجموع طول آنها برابر با ۱۹۸۸ است.

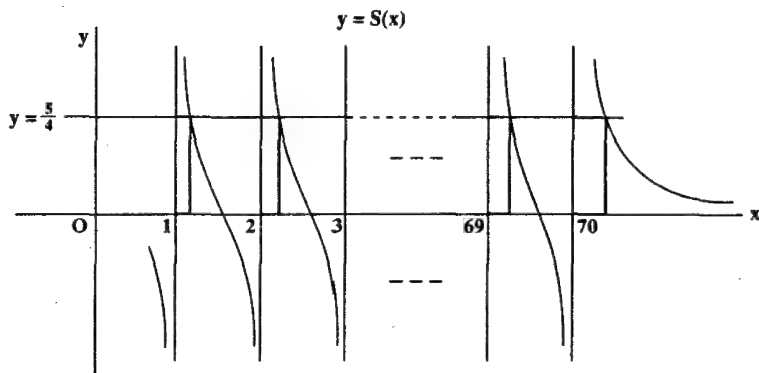
راه‌حل

جالب توجه است که چگونه عموماً مسأله خوبی را مطرح می‌کنند که شامل عدد سال برگزاری همان مسابقه است. از نظر من این مسأله از این لحاظ هم جالب است که عددهای ساده‌ای مانند 70° و $\frac{5}{4}$ منجر به وجود تعدادی بازه می‌شوند که مجموع طولشان دقیقاً برابر با ۱۹۸۸ است. نمی‌دانم کجا به این مسأله‌ها می‌رسند، ولی این یکی گوه‌ری دوست داشتنی است.

پس از انجام انواع بررسیهای بیهوده، در نهایت بیشتر اغب شدم تا رفتار تابع $S(x) = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k}$ را به کمک نمودار بررسی کنم؛ کاری که به نظر بسیاری از شرکت‌کنندگان در مسابقه در وهله اول انجام داده‌اند. بدیهی است که این تابع در نقاط $x = k$ ، $k = 1, 2, \dots, 70$ ، ناپیوسته است ولی در بازه‌های باز بین این عددهای صحیح پیوسته است. همچنین وقتی که x از طرف چپ به k میل کند تابع به $-\infty$ و وقتی که x از طرف راست به k میل کند تابع به $+\infty$ میل می‌کند. بنابراین نمودار مورد نظر خط $y = \frac{5}{4}$ را در هر یک از بازه‌های $(k, k+1)$ ، $k = 1, 2, \dots, 69$ ، قطع می‌کند. اگر $x > 70$ ، بزرگترین جمله $S(x)$ ، یعنی $\frac{70}{x-70}$ ، با بزرگ شدن x به طور نامحدودی کوچک و از اینجا معلوم می‌شود که قسمت مثبت محور x ‌ها مجانبی از نمودار این تابع است. بنابراین با رسم منحنی $y = S(x)$ معلوم می‌شود که مجموعه‌های x ‌هایی که به ازای آنها $S(x) \geq \frac{5}{4}$ از 70° بازه نیمباز (که از طرف چپ باز و از طرف راست بسته‌اند) تشکیل می‌شود و این بازه‌ها به ترتیبی از نقاط $x = 1, 2, \dots, 70$ آغاز می‌شوند.

درحقیقت، در نمودار $y = S(x) - \frac{5}{4}$ ، این بازه‌ها روی محور x قرار دارند و به شکل $(k, x_k]$ هستند که در آن ریشه‌ای از معادله $S(x) - \frac{5}{4} = 0$ است که بین k و $k+1$ واقع است. بنابراین طول بازه k ام $x_k - k$ و مجموع طول همه این بازه برابر است با

$$\begin{aligned} & (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + \dots + (x_{70} - 70) \\ &= (x_1 + x_2 + \dots + x_{70}) - (1 + 2 + \dots + 70) \end{aligned}$$



شکل ۲۲

آنچه باقی مانده این است که ثابت کنیم مجموع ریشه‌های $S(x) - \frac{5}{4} = 0$ برابر با

$$1988 + (1 + 2 + \dots + 70)$$

است. خوشبختانه این کار انجام محاسبه‌ای سراسر است، زیرا اگر $S(x) - \frac{5}{4} = ax^{70} + bx^{69} + \dots$ ، آنگاه مجموع ریشه‌ها برابر با $-\frac{b}{a}$ است.

پس از ساده کردن کسرها در

$$S(x) - \frac{5}{4} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \dots + \frac{70}{x-70} - \frac{5}{4} = 0$$

به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & 4(x-2)(x-3)\dots(x-70) + 4 \times 2(x-1)(x-3)\dots(x-70) \\ & + \dots + 4 \times 70(x-1)(x-2)\dots(x-69) - 5(x-1)(x-2)\dots(x-70) = 0 \\ & - 5x^{70} + x^{69}[4 \times 1 + 4 \times 2 + \dots + 4 \times 70 - 5(-1-2-\dots-70)] + \dots = 0 \\ & - 5x^{70} + x^{69}[4(1+2+\dots+70) + 5(1+2+\dots+70)] + \dots = 0 \\ & - 5x^{70} + 9(1+2+\dots+70)x^{69} + \dots = 0 \end{aligned}$$

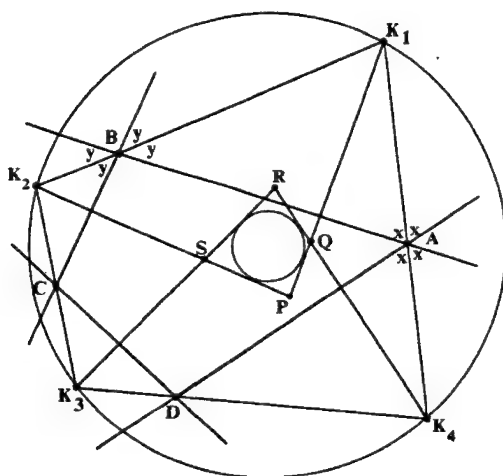
و مجموع ریشه‌ها برابر است با

$$\begin{aligned}\frac{9(1+2+\dots+70)}{5} &= (1+2+\dots+70) + \frac{4}{5}(1+2+\dots+70) \\ &= (1+2+\dots+70) + \frac{4}{5} \times \frac{70 \times 71}{2} \\ &= (1+2+\dots+70) + 28 \times 71 \\ &= (1+2+\dots+70) + 1988\end{aligned}$$

این همان چیزی است که می‌خواستیم.

مسأله زیبایی از هندسه از دوان دوتامپل

نتیجه زیبایی این بخش دستاوردی از دوان دوتامپل از دانشگاه دولتی واشنگتن است.



شکل ۲۳

مطابق شکل فرض کنید ضلعهای چهارضلعی محدب $ABCD$ را امتداد داده‌ایم و نیمسازهای زاویه‌های خارجی یکدیگر را در نقاط K_1, K_2, K_3, K_4 قطع کرده‌اند. چون هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است، K_1 از سه ضلع AB, DA و CB به یک فاصله است، پس K_1 مرکز دایره محاطی بیرونی چهارضلعی است که بر پاره خط AB در یکی از نقاط درونی‌اش مماس است، و K_2, K_3, K_4 و K_1 روی هم چهار مرکز دایره‌های محاطی بیرونی $ABCD$ هستند. ثابت کنید $K_1K_2K_3K_4$ همواره چهارضلعی محاطی است.

حال فرض کنید از هریک از K_i ها عمودی بر ضلع نظیرش از $ABCD$ رسم شود؛ یعنی، از

K_1 عمودی بر AB ، و از K_2 عمودی بر BC رسم شود و الی آخر، تا مطابق شکل ۲۴ از برخورد این خطوط چهارضلعی دیگری چون $PQRS$ پدید آید. این نتیجه جالب توجه را ثابت کنید که همواره $PQRS$ دایره محاطی دارد و این دایره همواره با دایره محیطی $K_1K_2K_3K_4$ هم‌مرکز است.

راه حل

اثبات اینکه $K_1K_2K_3K_4$ همواره محاطی است چندان دشوار نیست. با توجه به شکل ۲۴، هر زاویه‌ای که با x مشخص شده برابر با نصف زاویه خارجی در رأس A است، یعنی

$$x = \frac{1}{2}(180^\circ - A)$$

به همین ترتیب

$$y = \frac{1}{2}(180^\circ - B)$$

بنابراین z ، اندازه زاویه K_1 ، برابر است با

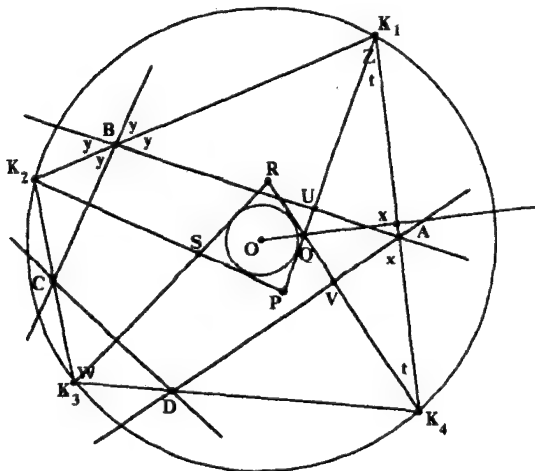
$$z = 180^\circ - x - y = \frac{1}{2}(A + B)$$

به همین ترتیب w ، اندازه زاویه K_3 ، برابر است با

$$w = \frac{1}{2}(C + D)$$

و در نتیجه $K_1K_2K_3K_4$ محاطی است، زیرا

$$z + w = \frac{1}{2}(A + B + C + D) = \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$$



شکل ۲۴

حال در مثلثهای قائم الزاویه K_1UA و K_4AV ، زاویه‌ها در رأس A با هم برابرند و در نتیجه زاویه‌ها در رأسهای K_1 و K_4 نیز با هم برابرند. در نتیجه مثلث K_1K_4Q مثلثی متساوی‌الساقین و از این رو نیمساز Q در این مثلث عمود منصف قاعده K_1K_4 است. ولی K_1K_4 وترى از دایره محیطی $K_1K_2K_3K_4$ است؛ پس این عمود منصف از مرکز این دایره، O ، می‌گذرد. به عبارت دیگر در چهارضلعی $PQRS$ ، OQ نیمساز $\angle Q$ است. به همین ترتیب OR ، OP و OS نیمساز زاویه‌های دیگر $PQRS$ هستند، و در نتیجه O از چهارضلع به یک فاصله است.

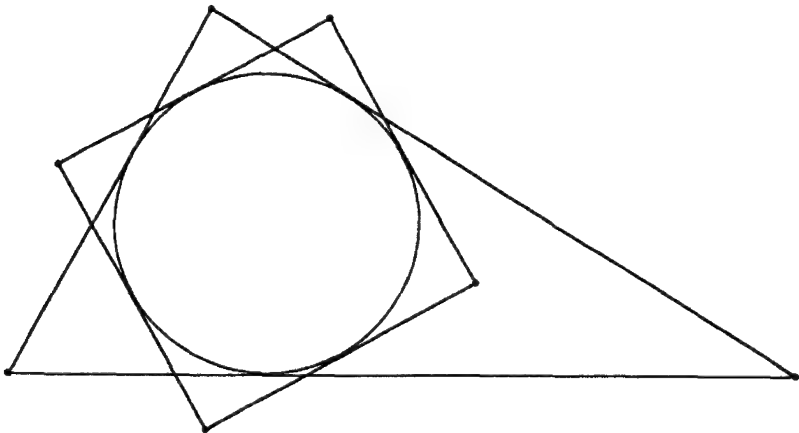
پرفسور دوتامیل یادآور شده است که حالت خاصی هم وجود دارد، یعنی وقتی که $PQRS$ به یک نقطه تبدیل می‌شود و، احتمالاً همان‌طور که انتظار دارید، این نقطه همان مرکز دایره محیطی $K_1K_2K_3K_4$ ، نقطه O ، است. وی همچنین یادآور شده است که شکل $K_1K_2K_3K_4$ نسبت به شکل $ABCD$ نظم بهتری دارد:

- (۱) شکل $ABCD$ هرچه باشد، $K_1K_2K_3K_4$ محاطی است؛
- (۲) وقتی که $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است، $K_1K_2K_3K_4$ نه تنها متوازی‌الاضلاع است، بلکه مستطیل هم هست؛
- (۳) وقتی که $ABCD$ مستطیل است، $K_1K_2K_3K_4$ نه تنها مستطیل است، بلکه مربع هم هست.

مسأله‌ای از المپیاد کی‌یف

خوشم نمی‌آید وانمود کنم که سطح کلاس نهم در کی‌یف نظیر سال اول دبیرستان در امریکای شمالی است. در هر حال مسأله جذاب زیر از المپیاد ۱۹۵۴ کی‌یف برای دانش‌آموزان کلاس نهم دبیرستان انتخاب شده است.

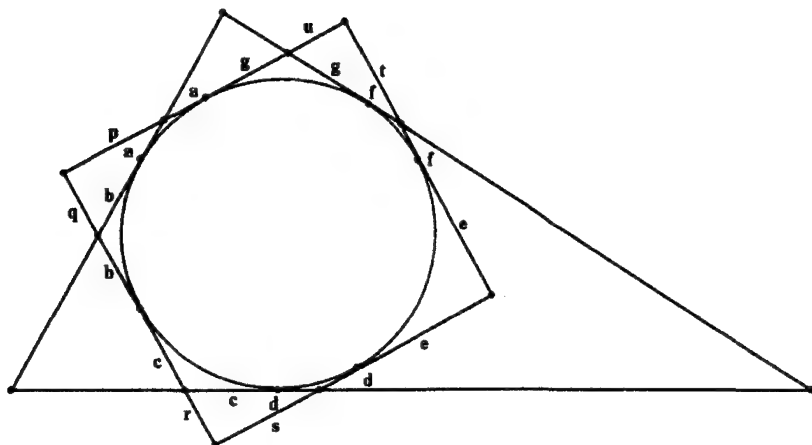
دایره‌ای در مثلث محاط و مربعی بر این دایره محیط شده است. ثابت کنید
بیش از نصف محیط مربع درون یا روی مثلث قرار دارد.



شکل ۲۵

راه‌حل

در حالت کلی، سه گوشه از مربع بیرون مثلث قرار می‌گیرد. فرض کنید طول ساقهای مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای که از گوشه‌های مربع جدا می‌شوند برابر با u, t, s, r, q, p و طول جفت مماسهای برابری که بر دایره رسم شده‌اند برابر با a, b, c, d, e, f و g باشد (به شکل ۲۶ نگاه کنید).



شکل ۲۶

در این صورت اندازه محیطی که درون مثلث قرار می‌گیرد برابر است با

$$(a + b) + (c + d) + (f + g) + 2e$$

که در آن e شعاع دایره محاطی است. همچنین محیطی که بیرون مثلث قرار می‌گیرد برابر است با

$$(p + q) + (r + s) + (t + u)$$

حال می‌دانیم که در مثلث‌های قائم‌الزاویه رابطه زیر برقرار است

$$\text{قطر دایره محاطی} = (\text{طول وتر}) - (\text{مجموع طول ساقها})$$

با توجه به شکل ۲۷ درستی این رابطه معلوم است. بنابراین

$$(p + q) - (a + b) = d_1$$

$$(r + s) - (c + d) = d_r$$

$$(t + u) - (f + g) = d_f$$

که در آنها d_1 و d_r و d_f قطر دایره‌های محاطی نظیرشان در مثلث‌های قائم‌الزاویه بیرون افتاده‌اند. بنابراین

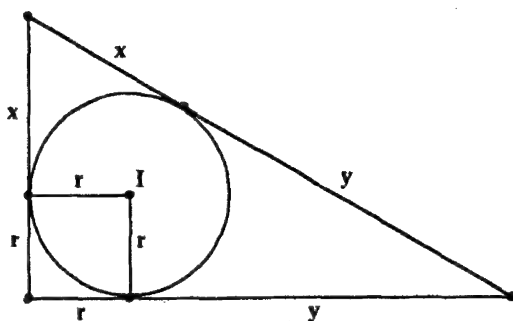
$$(p + q) + (r + s) + (t + u) - [(a + b) + (c + d) + (f + g)]$$

$$= d_1 + d_r + d_f$$

اگر $2e$ را از دو طرف این برابری کم کنیم نتیجه می‌شود

$$(p + q) + (r + s) + (t + u) - [(a + b) + (c + d) + (f + g) + 2e]$$

$$= d_1 + d_r + d_f - 2e$$



$$[(x+r) + (r+y)] - (x+y) = 2r$$

شکل ۲۷

یعنی

$$\text{محیط بیرونی} - \text{محیط درونی} = d_1 + d_2 + d_3 - 2e$$

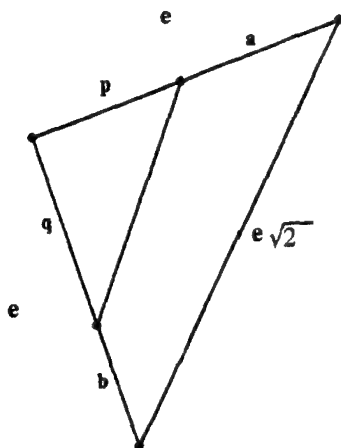
با ضرب کردن دو طرف در ۱- به دست می‌آید

$$\text{محیط بیرونی} - \text{محیط درونی} = 2e - (d_1 + d_2 + d_3)$$

تنها باقی مانده ثابت کنیم که این تفاضل مثبت است یا معادل آن

$$2e > d_1 + d_2 + d_3$$

بی‌تردید به دست آوردن اطلاعات مربوط به این قطرها به آسانی به دست نمی‌آید، مگر اینکه توجه کنید هریک از این مثلثهای کوچک در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقینی نشانده شده است که طول ساقهایش برابر با e ، شعاع دایره محاطی، است. برای مثال مثلث قائم الزاویه‌ای را در نظر بگیرید که طول ساقهایش برابرند با p و q (شکل ۲۸).



$$\begin{aligned} p + a &= e, \\ q + b &= e. \end{aligned}$$

شکل ۲۸

در این صورت بدیهی است که هریک از قطرهای d_1 ، d_2 و d_3 از قطر دایره محاطی چنین مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی، d ، بزرگتر نیست. ولی d برابر است با

$$\begin{aligned} d &= (e + e) - e\sqrt{2} \\ &= e(2 - \sqrt{2}) \\ &= e(2 - 1,4142\dots) \\ &< e(0,6) \\ &= \frac{3}{5}e \end{aligned}$$

در نتیجه

$$d_1 + d_2 + d_3 < \frac{9}{5}e < 2e$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

چند مسأله مورد علاقه دانش آموزان

مسائل این بخش از مجموعه مسائل گوناگونی با عنوان چهل مسأله هیجان انگیز انتخاب شده اند و آنها را دو دانشجو یعنی فرانک دیپولیتو از دانشگاه واترلو و راوی وکیل از دانشگاه تورنتو جمع آوری کرده اند.

مسأله ۱

هر یک از اعداد x_1, x_2, \dots, x_n یا برابر با ۱ است و یا برابر با -۱. اگر

$$S = x_1 x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 x_5 + x_3 x_4 x_5 x_6 + \dots + x_n x_1 x_2 x_3 = 0$$

ثابت کنید n باید مضرب ۴ باشد.

راه حل

از آنجا که هر یک از x_i ها یا برابر با ۱ است یا برابر با -۱، هر جمله مانند $x_a x_{a+1} x_{a+2} x_{a+3}$ نیز یا برابر با ۱ است یا برابر با -۱، و چون مجموع این جمله ها صفر است، تعداد جمله هایی که برابر با ۱ هستند با تعداد جمله هایی که برابر با -۱ هستند برابرند؛ به عبارت دیگر از هر کدام $\frac{n}{4}$ جمله وجود دارد. فرض کنید p تا از x_i ها برابر با ۱ باشند. چون هر یک از x_i ها در چهار جمله مانند $x_a x_{a+1} x_{a+2} x_{a+3}$ ظاهر می شود، عاملی چون x_i که برابر با ۱ است در کل $4p$ بار در مجموع S ظاهر می شود. هر جمله ای که برابر با ۱ است تعداد زوجی از عاملهای $+1 = x_i$ و هر جمله ای که برابر با -۱ است تعداد فردی از آنها را دربر دارد. بنابراین روی هم رفته کل تعداد دفعاتی که عاملی برابر با ۱ ظاهر می شود برابر است با

$$4p = \left(\text{مجموعی از } \frac{n}{4} \text{ عدد صحیح زوج} \right)$$

$$+ \left(\text{مجموعی از } \frac{n}{4} \text{ عدد صحیح فرد} \right)$$

چون هر مجموعی از عددهای زوج و نیز $4p$ زوج است نتیجه می شود که مجموع این $\frac{n}{4}$ عدد صحیح

فرد هم باید زوج باشد. ولی مجموع گردایه‌ای از عددهای فرد تنها وقتی زوج است که تعداد آنها عددی زوج باشد. پس $\frac{n}{4}$ باید زوج باشد و در نتیجه n مضرب ۴ است.

مسأله ۲

فرض کنید $f(x) = x^n$ که در آن n عددی طبیعی و ثابت است و x در مجموعه همه عددهای طبیعی، ۱، ۲، ۳، ...، تغییر می‌کند. با قرار دادن رقمهای $f(1)$ ، $f(2)$ ، ... به دنبال هم، عدد اعشاری y_n را می‌سازیم:

$$y_n = 0.\left(\begin{array}{c} \cdots \cdots \cdots \\ f(1) \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \cdots \cdots \cdots \\ f(2) \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \cdots \cdots \cdots \\ f(3) \end{array}\right) \cdots$$

پس برای مثال

$$y_2 = 0.1491625364946481000 \dots$$

و

$$y_3 = 0.182764125216343 \dots$$

آیا به ازای مقداری از n ، y_n عددی گویا می‌شود؟

راه حل

پاسخ این است «نه، y_n ها همواره گنگ‌اند».

توانهای 10^k موجب می‌شوند که هر y_n شامل رشته‌های به اندازه دلخواه طولی از 0 ها باشد:

$$f(10^k) = 10^{kn} = 10000 \dots 0$$

ولی هیچ عدد گویای اعشاری شامل رشته‌های به اندازه دلخواه طولی از 0 ها نیست، مگر اینکه عدد اعشاری مختوم باشد. پس اگر y_n گویا باشد الزاماً مختوم است. ولی هر بار که مقدار x^n ای را به رشته اضافه می‌کنیم، رقم غیرصفری در ابتدایش وجود دارد و در نتیجه y_n مختوم نیست.

مسأله ۳

فرض کنید $a_1 < a_2 < \dots < a_{23} < a_{24}$ عددهای صحیحی باشند که از ۱۲۵ بیشتر نیستند. ثابت کنید که بین ۴۳ تفاضل متوالی $d_i = a_{i+1} - a_i$ مقداری دست‌کم 10 بار تکرار می‌شود.

راه حل

اگر a_1 را در ابتدا بنویسیم، می‌توانیم هریک از a_i ها را با افزودن تفاضل‌های d_1, d_2, \dots, d_{i-1} به دست آوریم:

$$a_i = a_1 + d_1 + d_2 + \dots + d_{i-1}$$

بنابراین

$$a_{۴۴} = a_1 + d_1 + d_2 + \dots + d_{۴۳}$$

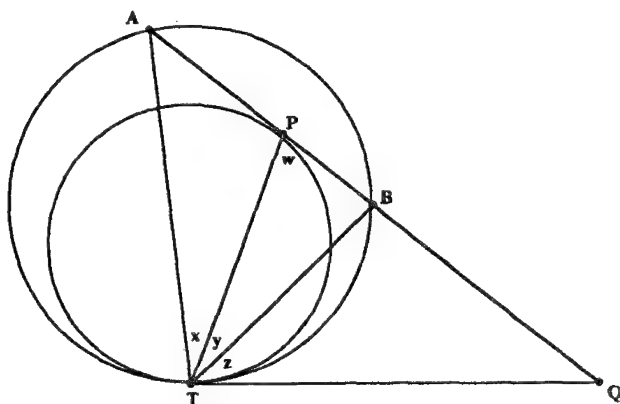
چون a_i ها متمایزند، همیشه $d_i \geq 1$. اینک اگر هیچ یک از d_i ها ۱۰ بار تکرار نشود، آن وقت، به ویژه، اینکه $d_i = 1$ و نیز $d_i = 2, 3, 4$ بیش از ۹ بار پیش نمی آید. در نتیجه مجموع ۳۶ تا از کوچکترین d_i ها دست کم برابر است با $90 = 9(1 + 2 + 3 + 4)$. هفت d_i ای که باقی می ماند باید دست کم برابر با ۵ باشند و

$$a_{۴۴} \geq a_1 + 9(1 + 2 + 3 + 4) + 7(5) = a_1 + 1۲۵ > ۱۲۵$$

در نتیجه $a_{۴۴}$ از حد ۱۲۵ می گذرد مگر اینکه یکی از d_i ها دست کم ۱۰ بار تکرار شود.

مسألة ۴

دو دایره در نقطه T مماس درونی اند. وتر AB از دایره بیرونی در نقطه P بر دایره درونی مماس است. ثابت کنید TP همواره نیمساز $\angle ATB$ است.



شکل ۲۹

راه حل

فرض کنید امتداد AB مماس مشترک دایره ها را در Q قطع کند و زاویه های x, y, z, w مطابق شکل ۲۹ مشخص شده باشند. در این صورت QT و QP مماسهایی بر دایره درونی و با هم برابرند، و در نتیجه مثلث TQP متساوی الساقین است و

$$w = y + z$$

TQ مماس بر دایره بیرونی و TB وتر آن است. در نتیجه زاویه بین آنها، z ، با زاویه محاطی واقع در طرف دیگر کمان برابر است، یعنی

$$z = \angle A$$

اینک زاویه خارجی w در مثلث APT برابر با مجموع دو زاویه درونی غیرمجاورش است و

$$w = x + \angle A = x + z$$

پس

$$w = y + z = x + z$$

و در نتیجه $y = z$ که همان نتیجه مطلوب است.

مسأله ۵

سه‌تایی $(۲, ۵, ۱۳)$ از اعداد صحیح را در نظر بگیرید. در هر حالت، عددی که یک واحد کمتر از حاصل ضرب دو تا از این عددها باشد مربع کامل است:

$$۲(۵) - ۱ = ۹, \quad ۲(۱۳) - ۱ = ۲۵, \quad ۵(۱۳) - ۱ = ۶۴$$

با وجود این، ثابت کنید که اگر عدد طبیعی جدیدی چون d به این سه‌تایی اضافه کنیم، دیگر چنین چیزی درست نیست. به عبارت دیگر به‌ازای هر عدد طبیعی مانند d ، عددهایی که یک واحد کمتر از حاصل ضرب دو تا از عددهای چهارتایی $\{۲, ۵, ۱۳, d\}$ هستند همگی مربع کامل نیستند.

راه حل

چون به‌ازای هر انتخابی به‌جای a و b از سه‌تایی اولیه $\{۲, ۵, ۱۳\}$ ، $ab - ۱$ مربع کامل است، فقط باید ثابت کنیم که به‌ازای هر d ، یکی از عددهای

$$x = ۲d - ۱, \quad y = ۵d - ۱, \quad z = ۱۳d - ۱$$

مربع کامل نیست.

رده‌مانده‌ای d به‌پیمانه ۴ را در نظر می‌گیریم. توجه می‌کنیم که هر مربع کامل به‌پیمانه ۴ همواره با یکی از دو عدد ۰ و ۱ همنهشت است، زیرا $(۲a)^2 = ۴a^2$ و $(۲a+۱)^2 = ۴(a^2+a)+۱$ ، و در نتیجه مجموع دو مربع کامل هیچ‌گاه به‌پیمانه ۴ همنهشت ۳ نمی‌شود. چند حالت وجود دارد.

(یک) $۲ \equiv d \pmod{4}$. در این حالت $۳ \equiv ۲d - ۱ \pmod{4}$ و x مربع کامل نیست.

(دو) $۳ \equiv d \pmod{4}$. به‌طور مشابه نتیجه می‌شود $۲ \equiv ۵d - ۱ \pmod{4}$ و y مربع کامل نیست.

(سه) $۱ \equiv d \pmod{4}$. در این حالت به‌ازای عدد درستی مانند k ، $k \geq ۰$ ، $d = ۴k + ۱$ ، و در نتیجه

$$x = ۸k + ۱, \quad y = ۲۰k + ۴ = ۴(۵k + ۱), \quad z = ۵۲k + ۱۲ = ۴(۱۳k + ۳)$$

حال فرض می‌کنیم هر سه عدد x, y و z مربع کامل باشند و می‌کوشیم به تناقض برسیم.
اگر $y = 4(5k + 1)$ ، y مربع کامل باشد، به دلیل اینکه ضریب ۴ مربع کامل است، باید عامل $5k + 1$ نیز مربع کامل باشد. به همین ترتیب عامل $13k + 3$ نیز در عدد z باید مربع کامل باشد. بنابراین هریک از عددهای $1, 5k + 1, 13k + 3$ باید مربع کامل باشد. از این رو اگر فرض کنیم

$$8k + 1 = a^2, \quad 5k + 1 = b^2, \quad 13k + 3 = c^2$$

معلوم می‌شود که

$$a^2 + b^2 = c^2 - 1$$

اینک همان طور که در بالا گفتیم (به پیمانه ۴) $1 \equiv c^2$ یا $0 \equiv c^2$ و

$$a^2 + b^2 = c^2 - 1 \equiv 3 \text{ یا } 0 \pmod{4} \quad (\text{به پیمانه } 4)$$

از آنجا که هیچ‌گاه $a^2 + b^2$ به پیمانه ۴ همنهشت ۳ نمی‌شود، نتیجه می‌گیریم

$$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{4} \quad (\text{به پیمانه } 4)$$

از آنجا که هریک از دو عدد a^2 و b^2 به پیمانه ۴ یا همنهشت ۰ است یا همنهشت ۱، همنهشتی بالا زمانی درست است که

$$a^2 \equiv b^2 \equiv 0 \pmod{4} \quad (\text{به پیمانه } 4)$$

به عبارت دیگر a^2 باید عددی زوج باشد. ولی روشن است که چنین نیست، زیرا $a^2 = 8k + 1$.

مسأله ۶

به ازای هر عدد طبیعی مانند $n, n \geq 2$ ، ثابت کنید

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \sin \frac{3\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

راه حل

n تا ریشه ۱ $x^n = 1$ عبارت‌اند از $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ که در آنها

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

حال

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

چون عامل $x - 1$ مربوط به ریشه ۱ $x = 1$ است، عامل مکملش باید مربوط به ریشه‌های دیگر باشد، و بنابراین تجزیه زیر به دست می‌آید

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^2) \cdots (x - \omega^{n-1})$$

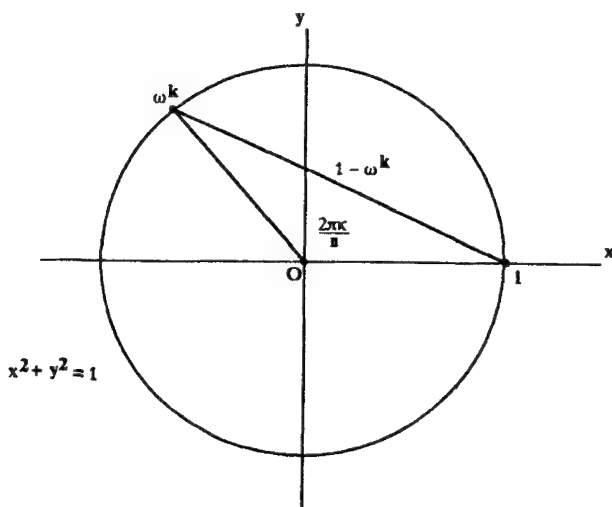
اگر در این اتحاد فرض کنیم $x = 1$ ، نتیجه می‌شود

$$n = (1 - \omega)(1 - \omega^2) \cdots (1 - \omega^{n-1})$$

و اگر قدرمطلق دو طرف این برابری را حساب کنیم به دست می‌آوریم

$$n = |1 - \omega| |1 - \omega^2| \cdots |1 - \omega^{n-1}| = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - \omega^k|$$

آنچه باقی مانده این است که ثابت کنیم $|1 - \omega^k| = 2 \sin \frac{\pi k}{n}$.



شکل ۳۰

در شکل ۳۰ مثلث برداری حاصل از بردارهای 1 ، ω^k و $1 - \omega^k$ در صفحه مختلط نشان داده شده است. بنابر قانون کسینوسها اندازه بردار $1 - \omega^k$ از رابطه زیر حساب می‌شود

$$\begin{aligned} |1 - \omega^k|^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cos \frac{2\pi k}{n} \\ &= 2 \left[1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi k}{n} \right) \right] = 4 \sin^2 \frac{\pi k}{n} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$|1 - \omega^k| = 2 \sin \frac{\pi k}{n}$$

که همان نتیجه مطلوب است و از اینجا رابطه مطلوب فوراً به دست می‌آید.

مسئله ۷

(a_1, a_2, \dots, a_n) جایگشتی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ است. مقدار میانگین مجموع

$$S = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)^2$$

وقتی به‌ازای همه $n!$ تا جایگشت حساب شود چقدر است؟

راه‌حل

فرض کنید (i, j) جفت مرتبی از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد. در این صورت $(n-2)!$ جایگشت وجود دارد که در آنها $a_1 = i$ و $a_2 = j$ و به این ترتیب $(n-2)!$ بار جمله اول S برابر می‌شود با

$$(a_1 - a_2)^2 = (i - j)^2$$

و به این ترتیب جمله $(i - j)^2 (n-2)!$ در مجموع $\sum S$ ، یعنی مجموع همه $n!$ تا مقدار S ، وجود دارد. همین جفت (i, j) به‌ازای هریک از $n-1$ جمله‌ای که به‌شکل $(a_k - a_{k+1})^2$ هستند به تعداد برابری در $\sum S$ وجود دارد، و مجموع آنها برابر است با

$$(n-1)(n-2)!(i-j)^2 = (n-1)!(i-j)^2$$

اگر روی همه جفتهای مرتب جمع ببندیم، مجموع بزرگ $\sum S$ از رابطه

$$\sum S = \sum_{(i,j)} (n-1)!(i-j)^2$$

به‌دست می‌آید، زیرا هر جمله در هر S نظیر جفت مرتبی چون (i, j) است. در نتیجه

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{n!} \sum S &= \frac{1}{n} \sum_{(i,j)} (i-j)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i-j)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i^2 - 2ij + j^2) \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n ni^2 + \sum_{j=1}^n nj^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n j \right) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[2n \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \right] \\ &= \frac{n(n+1)}{6} [2(2n+1) - 3(n+1)] \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{6} \\ &= \binom{n+1}{3} \end{aligned}$$

این پاسخ ترکیبیاتی جمع‌وجور انسان را به فکر می‌اندازد که آیا استدلال ترکیبیاتی خلاقانه‌ای وجود ندارد که این نتیجه را به سرعت و به آسانی به دست دهد؟

تمرینها

۱. اگر $a + b + c = 0$ ، رابطه زیر را ثابت کنید

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \right) \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{2} \right)$$

۲. مجموع زیر را حساب کنید

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$$

۳. الف) چندجمله‌ای با ضریبهای صحیح بیابید که $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ریشه آن باشد.

ب) چندجمله‌ای با ضریبهای صحیح بیابید که $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ ریشه آن باشد.

۴. ثابت کنید که اگر معادله $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ جوابی در مجموعه عددهای صحیح داشته باشد، آنگاه یکی از عددهای x ، y و یا z باید مضربی از ۷ باشد.

چهار مسأله استفاده نشده از المپیاد بین‌المللی، ۱۹۸۸

۱. مسأله‌ای از بلغارستان

(کوکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۲۲۵)

فرض کنید دنباله $\{a_n\}$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

بنابراین دنباله به شکل زیر آغاز می‌شود

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, \dots$$

تا آنجا که از این نمونه کوچک برمی‌آید نتیجه می‌گیریم

جمله‌هایی که یکی در میان، ابتدا از a_2 آمده‌اند بر ۲ بخش پذیرند و اینها تنها

جمله‌هایی هستند که بر ۲ بخش پذیرند؛

جمله‌هایی که سه تا در میان، ابتدا از a_4 آمده‌اند بر ۴ بخش پذیرند و اینها تنها

جمله‌هایی هستند که بر ۴ بخش پذیرند؛

جمله‌هایی که هفت تا در میان، ابتدا از a_8 آمده‌اند بر ۸ بخش پذیرند و اینها

تنها جمله‌هایی هستند که بر ۸ بخش پذیرند.

این ویژگی کلی را ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی مانند k ، a_n بر 2^k بخش پذیر است اگر و

تنها اگر n بر 2^k بخش پذیر باشد.

راه حل

بعید می‌دانم طراحان این مسأله انتظار داشته‌اند شرکت‌کنندگان بتوانند راه حلی شبیه به رهیافت پیچیده زیر ابداع کنند، ولی به هر حال روش زیر برای حل این مسأله بسیار جالب است.

نخستین گام این است که دستوری برای جمله عمومی، a_n ، پیدا کنیم. می‌توانیم این کار را به روش معمول با استفاده از تابعهای مولد انجام دهیم، اما به جای این کار می‌توانیم به روش زیبای زیر عمل کنیم. اگر x ریشه‌ای از معادله

$$x^2 = 2x + 1$$

باشد، می‌توانیم به کمک استقرا ثابت کنیم که به ازای هر $n \geq 2$ ،

$$x^n = a_n x + a_{n-1}$$

می‌دانیم که این رابطه به ازای $n = 2$ برقرار است و اگر $x^{n-1} = a_{n-1}x + a_{n-2}$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} x^n &= x \times x^{n-1} = a_{n-1}x^2 + a_{n-2}x \\ &= a_{n-1}(2x + 1) + a_{n-2}x \\ &= (2a_{n-1} + a_{n-2})x + a_{n-1} \\ &= a_n x + a_{n-1} \end{aligned}$$

حال ریشه‌های معادله $x^2 = 2x + 1$ ، یعنی ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ ، عبارت‌اند از

$$\alpha = 1 + \sqrt{2}, \quad \beta = 1 - \sqrt{2}$$

توجه کنید که $\alpha\beta = -1$. در نتیجه به ازای هر $n \geq 2$ ،

$$\beta^n = a_n \beta + a_{n-1}, \quad \alpha^n = a_n \alpha + a_{n-1}$$

اگر این دو برابری را از هم کم کنیم نتیجه می‌شود

$$\alpha^n - \beta^n = a_n(\alpha - \beta)$$

و در نتیجه

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

بدیهی است که این برابری به ازای $n = 0$ و $n = 1$ نیز برقرار است.

اینک دنباله $\{b_n\}$ را این‌طور تعریف می‌کنیم: $b_0 = 2$ و به ازای هر $n \geq 1$ ،

$$b_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

در این صورت

$$\{a_n\} = 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \dots$$

و

$$\{b_n\} = 2, 2, 6, 14, 34, 82, \dots$$

در نتیجه با توجه به دستور a_n دستوری برای b_n به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [(\alpha^{n+1} + \alpha^{n-1}) - (\beta^{n+1} + \beta^{n-1})] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\alpha^n \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) - \beta^n \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \right] \end{aligned}$$

اکنون

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \frac{\beta}{\alpha\beta} = \alpha - \beta$$

(به یاد آورید که $\alpha\beta = -1$) و

$$\beta + \frac{1}{\beta} = \beta + \frac{\alpha}{\alpha\beta} = \beta - \alpha = -(\alpha - \beta)$$

بنابراین b_n برابر است با

$$b_n = \alpha^n + \beta^n$$

با توجه به تجزیه

$$a_{2n} = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} (\alpha^n + \beta^n)$$

نتیجه اساسی زیر را به دست می آوریم

$$a_{2n} = a_n b_n$$

به آسانی معلوم می شود که $\{b_n\}$ رابطه بازگشتی زیر را از $\{a_n\}$ به ارث می برد

$$b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$$

زیرا بنابر تعریف

$$2b_{n-1} = 2a_{n-2} + 2a_n$$

و

$$b_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-1}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} 2b_{n-1} + b_{n-2} &= (2a_{n-2} + a_{n-2}) + (2a_n + a_{n-1}) \\ &= a_{n-1} + a_{n+1} = b_n \end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می شود که زوجیت b_{n-2} و b_n یکسان است، و چون b_1 و b_2 زوج اند (حتی b هم زوج است)، نتیجه می شود که همواره b_n زوج است. اما از این رابطه بازگشتی ویژگی مهم دیگری را نتیجه

می‌گیریم و آن اینکه همواره b_n برابر با دو برابر عددی فرد است. زیرا فرض کنید

$$b_{n-2} = 2d, \quad b_{n-1} = 2c$$

که در آنها c و d فردند. در این صورت

$$b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2} = 4c + 2d = 2(2c + d)$$

یعنی b_n هم دو برابر عددی فرد است. حال با توجه به اینکه b_1 و b_2 هر دو برابر 1×2 هستند، نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

بنابراین در سمت راست برابری

$$a_{2n} = a_n b_n$$

عامل b_n همواره دقیقاً یک عامل ۲ ایجاد می‌کند.

اینک اگر به $\{a_n\}$ بازگردیم، می‌توانیم به روشی مشابه نتیجه بگیریم که a_n زوج است اگر و تنها اگر n زوج باشد، زیرا با توجه به برابری $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ ، نتیجه می‌گیریم که زوجیت a_n و a_{n-2} یکسان است، و چون a_1 زوج است، به ازای هر n ، a_{2n} نیز زوج است و چون a_1 فرد است، به ازای هر n ، a_{2n+1} فرد است. بنابراین ویژگی مطلوب یعنی « 2^k ، a_n را می‌شمارد اگر و تنها اگر 2^k ، n را بشمارد» به ازای $k=1$ برقرار است. کار را به استقرا ادامه می‌دهیم. فرض کنید به ازای k ، $k \geq 2$ ، 2^{k-1} ، a_n را می‌شمارد اگر و تنها اگر 2^{k-1} ، n را بشمارد. اکنون 2^{k-1} ، a_n را نمی‌شمارد مگر اینکه a_n زوج باشد، و همان‌طور که گفتیم در این صورت n باید زوج باشد. بی‌تردید هنگامی که n بر 2^{k-1} بخش‌پذیر باشد عددی زوج است. بنابراین در بحث زیر همواره n زوج است و مثلاً $n = 2t$. همان‌طور که گفتیم در سمت راست برابریهای

$$a_n = a_{2t} = a_t b_t$$

b_t فقط یک عامل ۲ ایجاد می‌کند. در این صورت نتیجه می‌شود که 2^k ، a_n را می‌شمارد اگر و تنها اگر 2^{k-1} ، a_t را بشمارد.

ولی بنابر فرض استقرا 2^{k-1} ، a_t را می‌شمارد اگر و تنها اگر 2^{k-1} خود t را بشمارد، یعنی 2^{k-1} ، $\frac{n}{2}$ را بشمارد، یا معادل 2^k ، n را بشمارد. در نتیجه به استقرا نتیجه می‌شود که 2^k ، a_n را می‌شمارد اگر و تنها اگر 2^k ، n را بشمارد.

۲. مسأله‌ای از آلمان شرقی

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۲۵۷)

قفل گاوصندوقی از سه چرخ A ، B و C تشکیل شده است و هریک از آنها را می‌توان در هشت وضعیت مختلف قرار داد. به دلیل بروز نقص فنی در ساختمان قفل، هنگامی که دو تا از چرخها در وضعیت

درست قرار گیرند، در گاو صندوق باز می شود. بنابراین هر کسی می تواند با ۶۴ بار آزمایش در گاو صندوق را باز کند (به سادگی می توان در ازای هریک از ۸ حالت ممکن A هشت حالت ممکن B را امتحان کرد). با وجود این همواره می توانیم با انجام دادن تعداد دفعات بسیار کمتری آزمایش این کار را انجام دهیم. کمترین تعداد آزمایشهایی که پس از انجام دادن آنها گاو صندوق حتماً باز شده است چیست؟

راه حل

(این راه حل از همکارم پال شیلبرگ است.)

اگر (a, b, c) ترکیب درست چرخهای A ، B و C باشد، هر آزمایشی که به یکی از جفت های مرتب $(A, B) = (a, b)$ ، $(B, C) = (b, c)$ و $(C, A) = (c, a)$ بینجامد گاو صندوق را می گشاید. بنابراین باید طرحی ابداع کنیم که هر سه جفت مرتب را همزمان آزمایش کند. در حقیقت در هر آزمایش مانند (A, B, C) سه جفت (A, B) ، (A, C) و (B, C) نیز بررسی می شوند و با انجام این کار امکان رسیدن به یکی از جفت های کلیدی در کمترین تعداد گام های ممکن تضمین می شود.

نخست توجه کنید که چون ترکیب (a, b, c) شامل سه عدد است از اصل لانه کبوتری نتیجه می شود که یا

یک) دو تا از این عددها در مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ هستند؛ و یا

دو) دو تا از این عددها در مجموعه $\{5, 6, 7, 8\}$ هستند.

موقتاً توجه خود را به آزمایش $16 = 4^2$ جفت مرتب حاصل از مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ یعنی جفت های

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (4, 4)$$

معطوف می کنیم. هریک از این جفت های مرتب را باید در سه وضعیت مختلف آزمایش کرد که در نتیجه مجموعاً $4 \times 3 = 12$ آزمایش باید انجام داد. می توانیم بپذیریم که این کار فقط در ۱۶ آزمایش انجام شود، به شرط اینکه بتوانیم جفت ها را در سه تاییهایی مانند (A, B, C) طوری قرار دهیم که هر جفت مرتب مانند (x, y) یک بار به شکل (A, B) ، یک بار به شکل (B, C) و یک بار به شکل (C, A) ظاهر شود. بنابراین حل کامل این مسأله آرایه ای 4×3 است که ۱۶ آزمایشی را مشخص می کند که در آنها هریک از جفت های مرتب دقیقاً یک بار در هر جفت از سطرهای (A, B) ، (B, C) و (C, A) ظاهر شود.

A	۱		...	۱	...	۲
B	۲		...	۱	...	-
C	-		...	۲	...	۱

به نظر می رسد که ترتیب دادن چنین جدولی کار بسیار ساده ای است.

از آنجا که می خواهیم عددهای $\{1, 2, 3, 4\}$ کاملاً مخلوط باشند، کار را با ساختن آرایه ای

4×4 (یا همان مربع لاتین 4×4) آغاز می کنیم که در آن هر سطر و هر ستون یکی از $24 = 4!$

جایگشت عدد‌های (۱، ۲، ۳، ۴) است. روش‌های مختلفی برای انجام این کار وجود دارد. مثلاً از انتقالی سطر به سطر به دست می‌آوریم

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

اینک می‌توانیم جفت مرتبی مانند (x, y) را مختصات حجره‌ای در این آرایه در نظر بگیریم:

حجره (x, y) در سطر x ام و ستون y ام قرار دارد

بنابراین می‌توانیم هریک از ۱۶ جفت مرتب مانند (x, y) را با الصاق عدد واقع در حجره (x, y) به آن به سه‌تایی مرتب (x, y, z) تبدیل می‌کنیم. برای مثال

$$(2, 3) \rightarrow (2, 3, 2), (4, 2) \rightarrow (4, 2, 3)$$

با مرتب کردن سه‌تایی‌های حاصل به صورت ستونی، ۱۶ سه‌تایی مطلوب مانند (A, B, C) به دست می‌آوریم (چنین آرایه‌ای را آرایه‌ای متعامد نیز می‌نامند):

A	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲	۳	۳	۳	۳	۴	۴	۴	۴
B	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴
C	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱

به آسانی می‌توانید مستقیماً بررسی کنید که در هر جفت از سطرها هر جفت مرتب دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود.

بنابراین اگر دو عدد از ترکیب (a, b, c) به مجموعه $(1, 2, 3, 4)$ تعلق داشته باشند، با یکی از ۱۶ آزمایش بالا می‌توان در گاوصندوق را باز کرد. در غیر این صورت دو تا از عدد‌های (a, b, c) به مجموعه $(5, 6, 7, 8)$ تعلق دارند و در این صورت با آزمایشی در آرایه 16×3 مربوط به این عددها می‌توان در گاوصندوق را باز کرد. آرایه دوم با افزودن عدد ۴ به هریک از اعضای آرایه مربوط به $(1, 2, 3, 4)$ به دست می‌آید. بنابراین گاوصندوق با ۳۲ آزمایش یا کمتر از آن باز می‌شود.

برای اینکه ثابت کنیم ۳۲ کوچکترین عدد مورد نظر است، باید ثابت کنید ۳۱ آزمایش اولیه هر چه باشد، ترکیبی چون (a, b, c) وجود دارد که به طور کامل فراموش شده است، یعنی هیچ‌یک از جفت‌های (a, b) ، (b, c) یا (c, a) آزمایش نشده است. برای این کار، کوشش‌هایمان را در آرایه‌ای 8×8 مانند R دنبال می‌کنیم؛ به این ترتیب که عدد c مربوط به آزمایش (a, b, c) را در حجره‌ای با مختصات (a, b) ، یعنی حجره واقع در سطر a ام و ستون b ام، قرار می‌دهیم. به این ترتیب اگر عدد واقع در حجره واقع در سطر دوم و ستون پنجم ۶ باشد، نتیجه می‌گیریم که یکی از آزمایش‌های ما ترکیب $(2, 5, 6)$ بوده است. توجه می‌کنیم که اگر آنقدر مسرف بوده‌ایم که ترکیب $(2, 5, 3)$ را نیز آزمایش کرده بوده‌ایم، آنگاه عدد ۳

نیز به همراه عدد ۶ وارد حجره (۲، ۵) می‌شود. اینک فرض کنید که ۳۱ آزمایش را در آرایه R ثبت کرده باشیم. در این صورت لزوماً یکی از چهار حالت زیر رخ می‌دهد.

یک) فرض کنید یکی از سطرها یا یکی از ستونها دقیقاً شامل دو درایه باشد. برای روشنی وضع فرض کنید سطر سوم فقط شامل عددهای ۴ و ۷ است (شکل ۳۱ را ببینید). ممکن است این عددها در یک حجره باشند ولی در هر صورت دست‌کم شش ستون وجود دارد که درایه مشترکی با سطر سوم ندارند. اینک، هیچ‌یک از این شش ستون شامل ۵ درایه نیست، زیرا در غیر این صورت نیاز به $30 = 6 \times 5$ درایه داریم درحالی‌که تنها ۲۹ آزمایش دیگر در R ثبت شده است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که یکی از این ستونها بیش از ۴ درایه ندارد. مطابق شکل، فرض کنید ستون هفتم فقط درایه‌های ۸، ۱، ۳ و ۵ را داشته باشد. در این صورت درایه‌های سطر سوم و ستون هفتم روی هم ۶ تا از ۸ عدد (۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸)، یعنی عددهای $\{1, 3, 5, 7, 8\}$ ، را دربردارند و عدد (۶ و ۲) هیچ جایی در سطر سوم یا ستون هفتم ظاهر نمی‌شود. بنابراین اگر ترکیب درست (۳، ۷، ۶) باشد، در آزمایشهای ما به‌طور کامل نادیده گرفته شده است:

- اگر ترکیبی مانند (۳، ۷، c) را آزمایش کرده باشیم، عدد c باید در حجره

(۳، ۷) قرار می‌گرفت؛ ولی حجره (۳، ۷) خالی است.

- اگر ترکیبی مانند (۳، b ، ۶) را آزمایش کرده باشیم، عدد ۶ باید جایی در سطر

سوم (و در ستون b) قرار می‌گرفت که چنین نیست.

- اگر ترکیبی مانند (a ، ۷، ۶) را آزمایش کرده باشیم، عدد ۶ باید جایی در

ستون هفتم قرار می‌گرفت که چنین نیست.

ستون هفتم									
							8		
سطر سوم		4			7				
								1	
								3	
								5	

شکل ۳۱

با کوششی مشابه بالا، می‌توان همین استدلال را در حالت‌هایی که یکی از سطرها یا یکی از ستونها دقیقاً شامل یک درایه است یا اصلاً درایه‌ای ندارد به‌کار برد. از آنجا که برای قرار دادن ۴ عدد در هریک از ۸ سطر R نیاز به انجام ۳۲ آزمایش داریم، در نتیجه ۳۱ کوششی که انجام داده‌ایم یکی از سطرها حداکثر ۳ درایه دارد. بنابراین باید فقط حالتی را در نظر بگیریم که یکی از سطرها دقیقاً شامل ۳ درایه است. (دو مطابق شکل ۳۲ فرض کنید که سطر اول شامل ۳ درایه در ستونهای اول، دوم و سوم باشد. اگر یکی از این سه ستون یا دقیقاً شامل یک درایه بود یا دقیقاً شامل دو درایه، ادعای ما بر اساس یکی از حالت‌های قبل درست از آب درمی‌آمد. اینک فرض کنید که هریک از این ستونها دستکم شامل ۳ درایه باشد که در این صورت مجموع درایه‌های این ستونها روی هم دستکم برابر با ۹ می‌شود. در نتیجه، هیچ‌یک از ۵ ستون دیگر شامل ۵ درایه نیست، زیرا در غیر این صورت تنها ۲۲ آزمایش یا کمتر از آن در آنها ثبت شده است. پس یکی از این ستونهای دیگر باید شامل ۴ درایه یا کمتر از آن باشد و در نتیجه مانند بالا حکم ثابت می‌شود.

اگر از ۳ درایه سطر اول ۲ تا یا بیشتر از ۲ تا در یک حجره باشند، استدلال ما به ترتیب زیر تقویت می‌شود:

وجود ۳ درایه در یک حجره موجب می‌شود که در ۷ ستون دیگر بیش از ۲۸ درایه وجود نداشته باشد. وجود ۳ درایه در دو حجره موجب می‌شود که در دو ستون مربوط به آنها دستکم ۶ درایه وجود داشته باشد و به این ترتیب برای پر کردن ۶ ستون دیگر بیش از ۲۵ درایه باقی نمی‌ماند؛ در هر حال، یکی از ستونهای دیگر نباید بیش از ۴ درایه داشته باشد و این ستون و سطر اول همه ۸ عدد را ندارند. بنابراین در هر دنباله‌ای متشکل از ۳۱ آزمایش برای باز کردن گاو صندوق همواره دستکم یک ترکیب باقی می‌ماند که آزمایش نشده است. از اینجا نتیجه می‌شود که کمترین تعداد آزمایش لازم ۳۲ تاست.

X	X	X			
				X	
				X	
				X	
				X	

شکل ۳۲

۳. مسأله‌ای که طراحش مشخص نیست

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۲۶۰)

فرض کنید S مجموعه همه دنباله‌های دودویی به طول ۷ باشد:

$$S = \{0000000, 0000001, \dots, 1111111\}$$

فرض کنید تعداد مکانهایی را که در آنها دو دنباله با هم فرق دارند فاصله بین آنها بنامیم و T زیرمجموعه‌ای از S باشد که فاصله هر دو عضو برابر با ۳ است.

ثابت کنید T بیش از ۱۶ عضو ندارد و زیرمجموعه‌ای ۱۶ عضوی مانند T بسازید.

راه حل

بدیهی است که به ازای هر دنباله مفروض مانند A ، ۷ دنباله وجود دارد که دقیقاً در یک مکان با A تفاوت دارند. برای مثال ۷ دنباله‌ای که به فاصله یک از $A = 0000000$ قرار دارند عبارت‌اند از ۰۰۰۰۰۰۰۱، ۰۰۰۰۰۰۱۰، ۰۰۰۰۰۱۰۰، ۰۰۰۰۱۰۰۰، ۰۰۱۰۰۰۰۰، ۰۱۰۰۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰۰۰. به این ترتیب می‌توانیم دنباله‌های S را در زیرمجموعه‌هایی ۸ عضوی متشکل از دنباله‌ای مانند A و ۷ دنباله وابسته آن که فاصله‌شان از آن ۱ است مرتب کنیم؛ این زیرمجموعه وابسته به A را با \bar{A} نشان می‌دهیم.

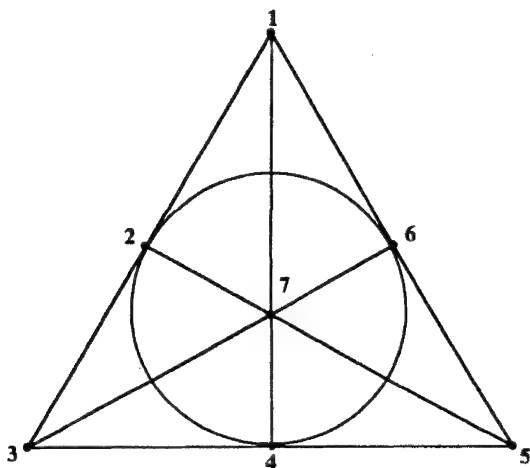
فرض کنید T ، n عضو مانند A_1, A_2, \dots, A_n داشته باشد و $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ و \bar{A}_n زیرمجموعه‌های وابسته به آنها باشند. به آسانی معلوم می‌شود که هیچ دوتایی از این زیرمجموعه‌ها عضو مشترک ندارند، زیرا اگر دنباله B به هر دو \bar{A}_i و \bar{A}_j تعلق داشته باشد، آنگاه فاصله بین \bar{A}_i و \bar{A}_j بیش از ۲ نیست، و این هم با تعریف T تناقض دارد. در این حالت

حداکثر با تغییر یکی از مکانها در A_i به B می‌رسیم (ممکن است B خود A_i باشد) و حداکثر با تغییر یکی از مکانها در B به A_j می‌رسیم.

بنابراین n عضو T مجموعاً به $8n$ دنباله مختلف در S وابسته‌اند. چون کل تعداد عضوهای S برابر با $128 = 2^7$ است، بنابراین $8n \leq 128$ و در نتیجه $n \leq 16$.

این نتیجه جواب بخش ساده‌ای از پرسش است. اما اینکه چگونه می‌توانیم زیرمجموعه‌ای ۱۶ عضوی مانند T بسازیم به هیچ‌وجه ساده نیست. در حقیقت بسیار ممکن است در همان کوششهای اولیه سردرگم و ناامید شویم.

با وجود این، این مسأله موضوع اوایل نظریه کدگذاری است و می‌توان آن را با استفاده از صفحه فانو به زیبایی حل کرد (شکل ۳۳ را ببینید). فرض کنید جای ۷ مکان موجود در دنباله‌های عضو S را با عددی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ نشان دهیم. خطوط این شکل (که یکی از آنها، یعنی ۲۴۶، منحنی است)، نشان می‌دهند که چگونه می‌توان با استفاده از ۰۰۰۰۰۰۰۰ مجموعه‌ای از ۷ دنباله ساخت



شکل ۳۳

به طوری که فاصله همه آنها از ۳ برابر با ۳ و فاصله آنها از یکدیگر برابر با ۴ باشد. هریک از این خطوط شامل سه تا از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ است و همه آنچه که باید انجام دهیم این است که در مکانهای مربوط به این سه عدد ۱ و در مکانهای دیگر ۰ بگذاریم:

$$X$$

۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰

بنابراین این مجموعه، X ، ۸ عضو زیرمجموعه T مطلوب را تأمین می‌کند. در مورد ۸ عضو باقی مانده T می‌توانیم از متممهای اینها، یعنی دنباله‌هایی که از تعویض ۰ها با ۱ها به دست می‌آیند، استفاده کنیم.

$$Y$$

۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱

بنابراین فاصله بین دو عضو Y یا برابر با ۳ است یا برابر با ۴، و همین طور فاصله بین پیشینیان آنها نیز یا برابر با ۳ است یا برابر با ۴. تنها پرسشی که باقی مانده این است که آیا ممکن است فاصله عضوی از X و عضوی از Y کمتر از ۳ باشد؟ به نظر می رسد که برای پاسخ دادن به این پرسش راهی به غیر از بررسی حالت های مستقیم بسیار وجود ندارد و شاید ترجیح دهید که هر عضو X را با هر عضو Y مقایسه و کار را تمام کنید. با وجود این چنین بررسی هایی را می توان به صورت زیر و به زیبایی انجام داد. جفت متمم $P = 000000$ و $P' = 111111$ کاملاً جدا از هم اند. از آنجا که هر عضو Y دست کم ۴ تا ۱ دارد، فاصله P از هر عضو Y دست کم ۴ است. به همین ترتیب فاصله P' از هر عضو X دست کم ۴ است. همچنین فاصله هر دنباله از متمم ۷ است. پس آنچه که باقی مانده بررسی فاصله عضوی مانند A از $\{X - P\}$ و دنباله ای چون B' از $\{Y - P'\}$ است که متمم A نیست. از بررسی مستقیم معلوم می شود که فاصله A و هر عضوی از دسته خودش، $\{X - P\}$ ، ۴ است. به عبارت دیگر دو عضو $\{X - P\}$ دقیقاً در سه مکان مطابق هم و در ۴ مکان متفاوت اند. به همین ترتیب در مورد هر دو عضو $\{Y - P'\}$ نیز چنین حکمی درست است. اینک A' ، متمم A ، را در نظر بگیرید. A' متعلق به Y است و هم اکنون گفتیم که B' و A' دقیقاً در سه مکان مانند u و v و w مطابقت دارند. از آنجا که باید همه مکان های A' را معکوس کنیم تا به A برسیم، A باید دقیقاً در همان سه مکان u ، v و w با B' متفاوت باشد و به این ترتیب راه حل مسأله تمام می شود.

$$\begin{array}{cc} X & Y \\ A : \dots u'v'w' & A' : \dots uvw \\ & B' : \dots uvw \end{array}$$

۴. مسأله ای از امریکا

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۲۵۶)

تعدادی چراغ علامت دهنده به فاصله های مساوی از یکدیگر در امتداد مسیر خط آهن یک طرفه ای قرار دارند و به ترتیب با عددهای ۱، ۲، ۳، ... و n ، $n \geq 2$ ، شماره گذاری شده اند. مطابق قانون هیچ قطاری مجاز نیست از جلو چراغی بگذرد که بین آن چراغ و چراغ بعد از آن قطار دیگری در حرکت است. با وجود این، در مورد تعداد قطارهایی که می توانند بی حرکت و پشت سر هم در مقابل چراغی توقف کنند تا نوبت عبورشان از بخش بعدی مسیر برسد محدودیتی وجود ندارد (قطارها را نقطه فرض کرده ایم و طولشان صفر است).

چند قطار باری باید از چراغ ۰ تا چراغ n رانده شوند. هر قطار مادامی که مطابق قانون متوقف نشده است همواره با سرعتی ثابت ولی متفاوت از بقیه حرکت می کند. ثابت کنید ترتیب قرار گرفتن قطارها هر طور که باشد، فاصله زمانی بین حرکت قطار اول از چراغ ۰ تا رسیدن قطار آخر به چراغ n مقداری یکسان است.

راه حل

همان‌طور که در شکل ۳۴ نشان داده شده است می‌توانیم پیشروی قطارها را به‌خوبی در نمودار زمان - مسافت رسم کنیم. در این جدول چراغها به فاصله‌های مساوی روی محور y ها مشخص شده‌اند و زمان روی محور x ها مشخص شده است. از آنجا که سرعت هر قطار ثابت است، می‌توان پیشروی آن را در فاصله بین دو چراغ متوالی با پاره‌خط مشخص کرد. هرچه شیب این پاره‌خط تندتر باشد سرعت قطار بیشتر است. بدیهی است که قطار اول هیچ‌گاه متوقف نمی‌شود و همهٔ قسمت‌ها را بدون توقف طی می‌کند. ولی مسیر قطارهای بعدی را می‌توان به‌خوبی با مسیری زیگزاگ مانند مشخص کرد که در آن هر قسمت موازی محور x ها زمان توقف قطار برای آزاد شدن عبورش از قسمت بعدی را نشان می‌دهد. در حقیقت کلید حل مسأله این است که کندترین قطار هر جا که در مجموعهٔ قطارها قرار داشته باشد هیچ‌گاه پشت چراغی متوقف نمی‌شود. درواقع این مطلب نتیجه‌ای فوری از حکم کلی زیر است:

قطاری که از قطارهای پیش از خودش کندتر حرکت می‌کند هرگز پشت چراغی متوقف نمی‌شود.

کار را به استقرا انجام می‌دهیم.

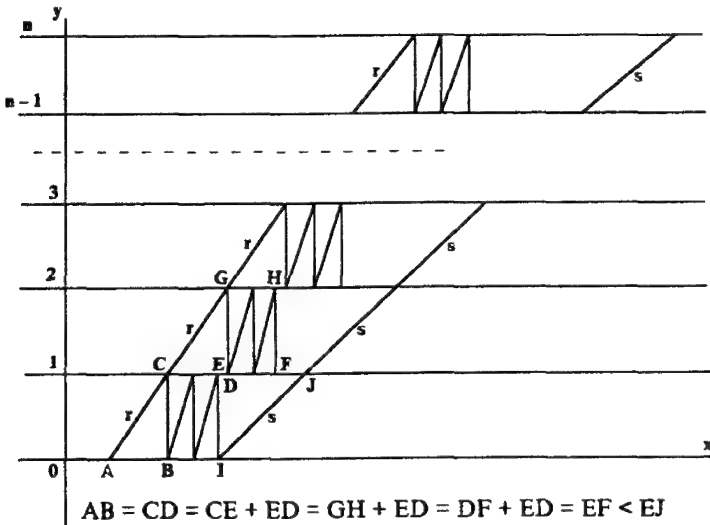
همان‌طور که گفتیم اولین قطار هرگز متوقف نمی‌شود و در نتیجه وقتی که $t = 1$ حکم در مورد قطار r ام درست است. فرض کنید به‌ازای t ، $r \geq 1$ ، قطار r ام هرگز متوقف نشود و در نتیجه خطی راست در عرض نمودار رسم شود. همچنین فرض کنید کندترین قطار بعد از قطار r ام قطار s ام باشد. حال همان‌طور که از شکل معلوم است ممکن است چند قطار بین این دو قطار وجود داشته باشد. از آنجا که قطار s ام کندترین قطار بعد از قطار r ام است، همهٔ قطارهایی که بین آنها قرار دارند از قطار r ام سریعتر حرکت می‌کنند. در این حالت نمودارهای مربوط به قطارهای t ، $t+1$ ، $t+2$ ، ... تا قطار s ام، ولی نه خود آن، شکلی می‌سازند که در آن قطعه‌های بین چراغهای متوالی همگی شبیه به‌هم‌اند. این قطعه‌ها درست مانند قطعهٔ بین نقطهٔ شروع و تراز اول‌اند که در هر تراز تکرار شده است. بنابراین، برای مثال، در شکل ۳۴ پاره‌خط GH در تراز ۲ با پاره‌خط CE در تراز اول برابر است. از آنجا که GH با DF در تراز ۱ نیز برابر است، نتیجه می‌شود

$$CD = CE + ED = GH + ED = DF + ED = EF$$

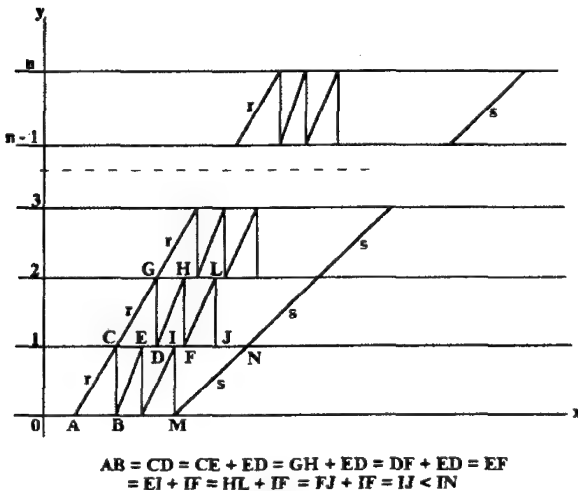
بنابراین در شکل ۳۴ به‌سادگی می‌توانیم نتیجه بگیریم که $AB = CD = EF$. (به محاسبات زیر شکل ۳۴ توجه کنید.)

حال قطار s آهسته‌تر از قطار r حرکت می‌کند و در نتیجه مکان‌هندسی آن در قسمتی از مسیر پاره‌خطی است که شیب آن از شیب AC که مساوی با شیب IF مربوط به قطار r است کمتر است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که مکان‌هندسی s باید از تراز ۱ در نقطه‌ای مانند J عبور کند که بعد از زمان F قرار دارد و این یعنی اینکه قطار s در تراز ۱ متوقف نشده است و بنابراین در هیچ تراز بعد از آن نیز متوقف نمی‌شود.

چون شکل ۳۴ نسبتاً جامع نیست، وضعیت نوعی دیگری در شکل ۳۵ نشان داده شده است که بازهم به همان نتیجه قبلی می‌انجامد، زیرا همان‌طور که در زیرنویس شکل استدلال شده است $AB = IJ < IN$.



شکل ۳۴



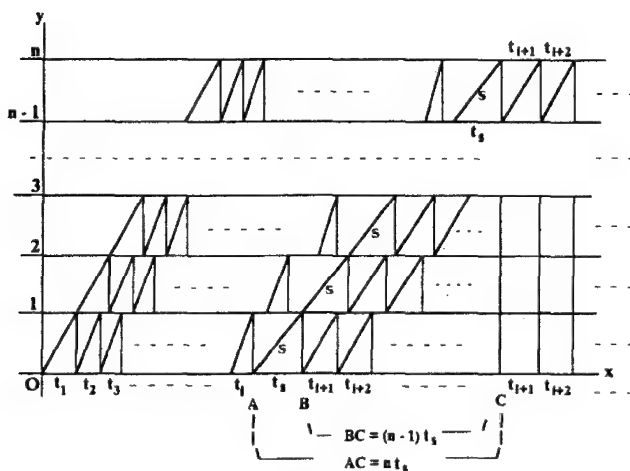
شکل ۳۵

برای اینکه راه حل را کامل کنیم فرض کنید k قطار به ترتیب دلخواهی قرار گرفته‌اند و t_i زمان لازم عبور برای قطار k ام از یک قسمت مسیر باشد. با توجه به شکل ۳۶ بدیهی است که می‌توان کل زمانی

را که برای انجام این کار لازم است، T ، از روی محور زمان به دست آورد. و اگر t_s زمان عبور کندروترین قطار باشد،

$$T = \sum_{i=1}^k t_i + (n-1)t_s$$

و در نتیجه در حالت‌های مختلف مقدار T فرقی نمی‌کند.



شکل ۳۶

مسأله‌هایی از آزمون ریاضیات دعوتی امریکا، ۱۹۸۸

(کدکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۹۹)

هر سال ابتکاراتی که طراحان آزمونهای ریاضیات دعوتی امریکا در طرح مسائل خود به‌کار می‌برند موجب تعجب من می‌شود. تنوع و کیفیت این مسائل بسیار چشمگیر و این مایه دلخوشی کل جامعه ریاضی است. از آنجا که تنها سه ساعت برای پاسخ دادن به ۱۵ پرسش وقت است، این مسائل به دشواری مسائل المپیادها نیستند. با وجود این، این مسائل در سطح خودشان اغلب بسیار ابتکاری‌اند.

			*	
	74			
				186
		103		
0				

شکل ۳۷

مسأله ۱

در ۲۱ خانه خالی آرایه 5×5 ای که در شکل ۳۷ نشان داده شده است می‌توانیم عددهایی صحیح را طوری قرار دهیم که عددهای واقع در هر سطر و هر ستون تصاعدی حسابی تشکیل دهند. عددی را که باید در خانه * قرار گیرد تعیین کنید.

4d			*	
3d	74			
2d	y			186
d	x	103		
0				

شکل ۳۸ (الف)

52	82	112	142	
39	74			
26	66			186
13	58	103		
0				

شکل ۳۸ (ب)

راه حل

عددهای نخستین ستون از پایین به بالا باید ۰، d ، $2d$ ، $3d$ و $4d$ باشند (شکل ۳۸ (الف) را ببینید).
درایه‌های x و y در شکل ۳۸ (الف) را می‌توان برحسب d به صورت واسطه‌های حسابی همسایه‌هایشان به شکل زیر نوشت:

$$x = \frac{d + 103}{2} \quad (۱)$$

و در نتیجه

$$y = \frac{x + 74}{2} = \frac{d + 251}{4} \quad (۲)$$

بنابراین در سطر سوم قدرنسبت تصاعد برابر است با

$$D = y - 2d = \frac{251 - 7d}{4}$$

از آنجا که عدد ۱۸۶ در آخرین سطر همان $2d + 4D$ است، پس

$$2d + (251 - 7d) = 186$$

$$65 = 5d$$

و

$$d = 13$$

در نتیجه $x = 58$ و $y = 66$ و می‌توانیم دو ستون اول را تعیین و سطر بالایی را با تصاعد ۵۲، ۸۲، ۱۰۰، پر کنیم. بنابراین، همان‌طور که در شکل ۳۸ (ب) می‌بینید، درایه موردنظر ۱۴۲ است.

مسأله ۲

وجه‌های چندوجهی محدبی ۱۲ مربع، ۸ شش ضلعی منتظم و ۶ هشت ضلعی منتظم‌اند. در هر رأس چندوجهی یک مربع، یک شش ضلعی و یک هشت ضلعی به هم رسیده‌اند. چند تا از پاره‌خطهایی که رأسهای چندوجهی را به هم وصل می‌کنند به جای اینکه روی یالی از چندوجهی قرار گیرند و یا از روی وجهی از آن بگذرند از درون چندوجهی می‌گذرند؟

راه حل

همان‌طور که تلویحاً در صورت مسأله ذکر شد، تعداد پاره‌خطهایی که از درون چندوجهی می‌گذرند برابر است با

$$D = \text{تعداد کل پاره‌خطهایی که رأسها را به هم وصل می‌کنند}$$

$$- (\text{تعداد قطره‌های وجه‌ها}) - (\text{تعداد یالها}) -$$

هریک از این مقدارها را می‌توانیم به ترتیب زیر و به سادگی محاسبه کنیم.

(الف) یالها. هر مربع چهار یال، هر شش ضلعی ۶ یال و هر هشت ضلعی ۸ یال دارد که کلاً $144 = 12 \times 4 + 6 \times 8 + 8 \times 6$ یال می‌شود. با وجود این، هر یال مرز دو وجه است و در مجموع بالا هر یال دو بار به حساب آمده است. پس تعداد واقعی یالها ۷۲ تا است.

(ب) قطره‌های وجه‌ها. هر مربع ۲ قطر دارد، هر شش ضلعی $9 = 6 - \left(\frac{6}{2}\right)$ قطر دارد (مجموعاً $15 = \left(\frac{6}{2}\right)$ پاره‌خط وجود دارد که ۶ تایی آنها یال‌اند) و هر هشت ضلعی $20 = 8 - \left(\frac{8}{2}\right)$ قطر دارد: پس مجموعاً

$$12 \times 2 + 8 \times 9 + 6 \times 20 = 216$$

قطر وجود دارد و هر قطر دقیقاً یک بار شمرده شده است.

ج) رأسها. در آخر، تعداد کل رأسها در میان وجه‌ها برابر است با

$$۱۲ \times ۴ + ۸ \times ۶ + ۶ \times ۸ = ۱۴۴$$

ولی فقط $\frac{۱۴۴}{۳} = ۴۸$ رأس در چند وجهی وجود دارد، زیرا هر رأس در چندوجهی رأسی از سه وجه است.

بنابراین تعداد قطرهای درونی مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned} D &= \binom{۴۸}{۲} - ۷۲ - ۲۱۶ \\ &= ۲۴ \times ۴۷ - ۷۲ - ۲۱۶ = ۲۴(۴۷ - ۳ - ۹) \\ &= ۲۴ \times ۳۵ = ۸۴۰ \end{aligned}$$

مسأله ۳

اگر a و b عددهایی صحیح باشند و $x^2 - x - ۱$ عاملی از

$$ax^{۱۷} + bx^{۱۶} + ۱$$

باشد، a را بیابید.

راه حل

بنابر قضیهٔ عاملها $x - c$ عاملی از چندجمله‌ای $f(x)$ ، که ضریبهای عددهایی صحیح‌اند، است اگر و تنها اگر $f(c) = ۰$. اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - x - ۱ = ۰$ برابر با α و β باشند، آنگاه $x^2 - x - ۱ = (x - \alpha)(x - \beta)$ و اگر $x^2 - x - ۱$ عاملی از $ax^{۱۷} + bx^{۱۶} + ۱$ باشد، آنگاه عبارتهای $x - \alpha$ و $x - \beta$ نیز عامل آن هستند و

$$a\alpha^{۱۷} + b\alpha^{۱۶} + ۱ = ۰$$

و

$$a\beta^{۱۷} + b\beta^{۱۶} + ۱ = ۰$$

برای یافتن a به ترتیب زیر عمل می‌کنیم

$$a\alpha^{۱۷}\beta^{۱۶} + b\alpha^{۱۶}\beta^{۱۶} + \beta^{۱۶} = ۰$$

$$a\alpha^{۱۶}\beta^{۱۷} + b\alpha^{۱۶}\beta^{۱۶} + \alpha^{۱۶} = ۰$$

اگر این برابریها را از هم کم کنیم:

$$a\alpha^{۱۶}\beta^{۱۶}(\alpha - \beta) + \beta^{۱۶} - \alpha^{۱۶} = ۰$$

که از آن نتیجه می شود

$$a = \frac{\alpha^{16} - \beta^{16}}{\alpha^{16}\beta^{16}(\alpha - \beta)}$$

چون α و β ریشه های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ هستند، $\alpha\beta = -1$ و در نتیجه

$$a = \frac{\alpha^{16} - \beta^{16}}{\alpha - \beta}$$

به آسانی می توان دریافت که مقدار $\alpha - \beta$ برابر با $\sqrt{5}$ است، ولی محاسبه مقدار $\alpha^{16} - \beta^{16}$ با توجه به اینکه α و β گنگ اند،

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

کار بسیار دشواری است.

بی تردید دانستن این مطلب ارزشمند است که α و β همان عددهایی اند که در دستور بینه^۱ برای محاسبه عددهای فیبوناچی آمده اند:

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

بنابراین عدد مطلوب چیزی بجز f_{16} نیست. از محاسبه ۱۶ جمله اول دنباله فیبوناچی درمی یابیم که مقدار f_{16} برابر با ۹۸۷ است:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \underline{987}, \dots$$

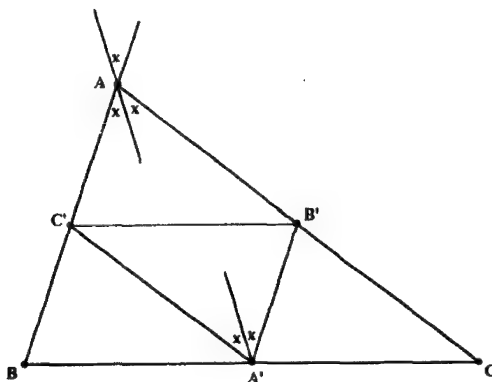
مسأله استفاده نشده‌ای از بلغارستان دربارهٔ مثلث میانه‌ای و مثلث ژرگون

مثلثی که با A' ، B' و C' ، وسط ضلعهای $\triangle ABC$ ، مشخص می‌شود، مثلث میانه‌ای آن نامیده می‌شود. بدیهی است که هریک از ضلعهای مثلث میانه‌ای موازی ضلع مقابل آن در $\triangle ABC$ است و در نتیجه زاویهٔ این مثلثها با هم برابرند:

$$\angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C'$$

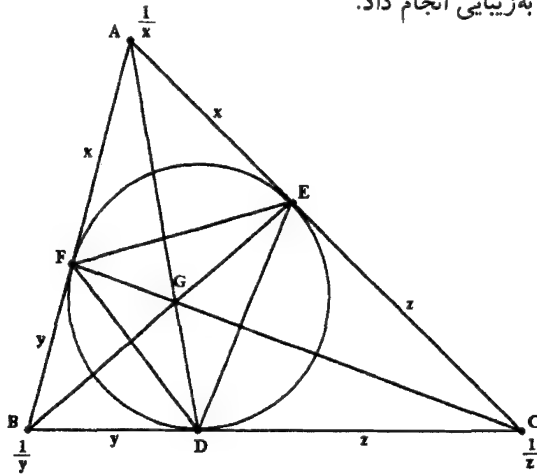
یکی از ویژگیهای مهم مثلث میانه‌ای این است که در هر مثلث و مثلث میانه‌ای آن نیمی‌ساز زاویه‌های متناظر با هم موازی‌اند. مثلاً نیمی‌ساز زاویه‌های برابر A و A' به یک اندازه به طرف راستای مشترک AB و $A'B'$ کج شده است (شکل ۳۹ را ببینید).

ممکن است شگفت‌انگیز به نظر برسد که همواره سه خطی که رأسهای مثلثی مانند ABC را به نقاط تماس دایرهٔ محاطی مثلث با ضلعهای مقابل به آن رأسها وصل می‌کنند، در نقطه‌ای مانند G به نام نقطهٔ ژرگون هم‌رس‌اند (شکل ۴۰ را ببینید). این نقطه به نام هندسه‌دان فرانسوی ژوزف ژرگون



شکل ۳۹

(۱۷۷۱ - ۱۸۵۹ م.) نامگذاری شده است. از آنجا که جای این نقاط تماس، یعنی D ، E و F ، برحسب اطلاعاتی که به آسانی قابل استفاده باشند مشخص نشده است، ممکن است به نظر برسد که برهان این حکم ساده نیست. اگرچه می‌توان این حکم را با استفاده از قضیه سوا به آسانی ثابت کرد، ولی به روش زیر نیز می‌توان کار را به زیبایی انجام داد.



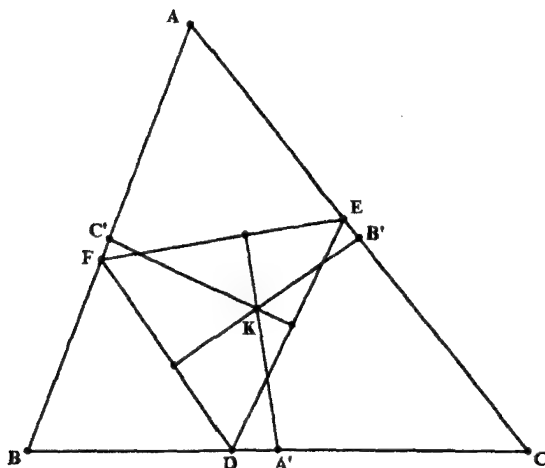
شکل ۴۰

مطابق شکل ۴۰، فرض کنید طول مماسهای مساوی که از رأسهای مثلث بر دایره محاطی آن رسم شده‌اند، برابر با x ، y و z باشند و جرمهای $\frac{1}{x}$ ، $\frac{1}{y}$ و $\frac{1}{z}$ را به رأسها نسبت داده‌ایم. در این صورت بدیهی است که نقطه F مرکزقل جرمهای موجود در نقاط A و B است (زیرا $\frac{1}{x} \times x = \frac{1}{y} \times y$) و در نتیجه دستگاه جرمهای موجود معادل است با جرم $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ در نقطه F و جرم $\frac{1}{z}$ در نقطه C . به این ترتیب مرکزقل کل دستگاه باید جایی روی پاره خط FC باشد. ولی همین مطلب درباره BE و AD نیز درست است و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

مثلث DEF را که از نقاط تماس دایره محاطی با ضلعها پدید می‌آید مثلث ژرگون $\triangle ABC$ می‌نامیم، اگرچه معتقدم این نامگذاری در کتابهای ریاضی معمول نیست. به این ترتیب می‌توانیم مسأله زیبایی را که چند سال پیش از طرف بلغارستان در یکی از المپیادهای بین‌المللی مطرح شده بود به شکل ساده زیر بیان کنیم.

ثابت کنید در هر مثلث عمودهایی که از رأسهای مثلث میانه‌ای بر ضلعهای مقابلشان از مثلث ژرگون رسم شده‌اند هم‌رس‌اند.

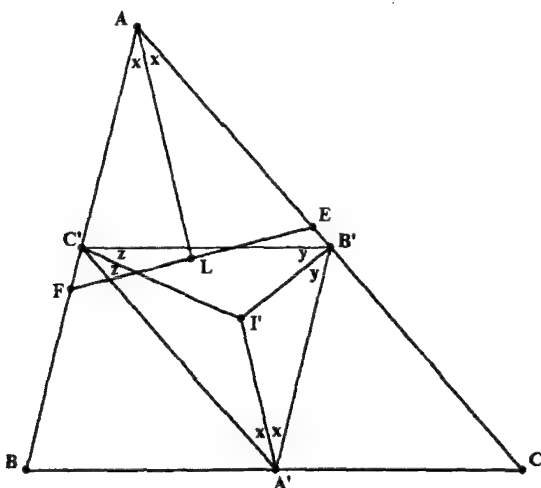
علی‌الظاهر به نظر نمی‌رسد ارتباطی میان مثلث میانه‌ای و مثلث ژرگون وجود داشته باشد و از این رو ممکن است انتظار داشته باشیم راه حل مسأله منوط به پیدا کردن رابطه‌ای دشوار، پیچیده و نه چندان جالب توجه باشد. به همین دلیل برهان روشن و ساده‌فهم زیر را از ج. ت. گرونمان از آرنهم در هلند (که در مجله کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۷۵ نقل شده است) بسیار شگفت‌انگیز است.



شکل ۴۱

چون مماسهای AE و AF بر دایرهٔ محاطی برابرند پس $\triangle AFE$ متساوی الساقین است (شکل ۴۲ را ببینید) و در نتیجه AL ، نیمساز زاویهٔ A ، بر قاعدهٔ FE عمود است. به عبارت دیگر هر عمود وارد بر ضلع FE از مثلث زرگون با AL موازی است.

ولی همان طور که در بالا گفتیم نیمساز $\angle A'$ در مثلث میانه‌ای با نیمساز $\angle A$ موازی است، و بنابراین نیمساز $\angle A'$ در حقیقت باید همان عمود مورد نظر از A' بر FE باشد. بنابراین سه عمود مورد نظر نیمساز زاویه‌های مثلث میانه‌ای اند، و در نتیجه در I' ، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث میانه‌ای، هم‌رس‌اند.



شکل ۴۲

دوره حل از جان موری از المپیاد دبیرستانی لنینگراد، ۱۹۸۲

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۱۰۷)

جان موری اهل شهر دالاس ایالت تگزاس است و راه‌حلهای برجسته‌ای از او در مجله کروکس ماتماتیکوروم منتشر شده است.

مسأله ۱

چهار جمله اول دنباله نامتناهی S که از رقمهای اعشاری تشکیل شده است برابرند با ۱، ۹، ۸ و ۲ و هریک از جمله‌های بعدی با رقم آخر مجموع چهار جمله قبل از آن برابر است. بنابراین S با جمله‌های زیر آغاز می‌شود

$$۱, ۹, ۸, ۲, ۰, ۹, ۹, ۰, ۸, ۶, ۳, ۷, ۴, ۰, ۰, \dots$$

آیا ممکن است رقمهای ۳، ۴ و ۴ در S به‌طور متوالی ظاهر شوند؟

راه حل

مطلبی که باید مورد توجه قرار دهیم این است که این دنباله از روی چهار جمله متوالی‌اش، هر جا که باشند، به‌طور کامل مشخص می‌شود. برای مثال، چهار جمله ۸، ۲، ۰ و ۹ در مکانهای ۳ تا ۶ نه‌تنها جمله‌های بعدی را به‌دست می‌دهند، بلکه همه جمله‌های قبلی را نیز تولید می‌کنند. بدیهی است که اگر

$$y, x, ۸, ۲, ۰, ۹$$

رقم آخر ۰ + ۲ + ۸ + x باید برابر با ۹ باشد؛ یعنی x برابر با ۹ است و بنابراین رقم آخر ۲ + ۸ + ۹ + y باید ۰ باشد که در نتیجه $y = ۱$. در حقیقت، دنباله S صرفاً شاخه‌ای از دنباله‌ای مانند T است که از دو جهت به‌طور نامتناهی ادامه دارد و هر جا که چهار جمله متوالی آن را انتخاب کنیم بقیه دنباله از روی آنها کاملاً مشخص می‌شود.

اگر چند جمله از پشت سر S را پیدا کنیم به دست می آوریم

$$\dots, 3, 0, 4, 4, \overleftarrow{1, 9, 8, 2}, \dots$$

از اینجا معلوم می شود که هدف بررسیهای ما، یعنی پیدا کردن چهار جمله متوالی ۳، ۰، ۴ و ۴، مطمئناً در دنباله کامل، T ، دست یافتنی است. در نتیجه، اگر دنباله T متناوب باشد، آنگاه ۳، ۰، ۴ و ۴ بی نهایت بار پشت سر هم در هریک از شاخه های آن ظاهر می شوند.

از این رو فرض کنید دنباله T در دو طرف بلوک $\underline{1, 9, 8, 2}$ به بلوکهای مجاور هم و شامل چهار جمله متوالی افزاز شده باشد:

$$\leftarrow T \rightarrow$$

$$\dots \underline{3, 0, 4, 4} \quad \underline{1, 9, 8, 2} \quad \underline{0, 9, 9, 0} \quad \underline{8, 6, 3, 7} \dots$$

از آنجا که در دستگاه دهدهی تنها 10^4 بلوک مختلف وجود دارد، بلوکی مانند $\underline{a, b, c, d}$ باید دوبار در T ، مثلاً در جای بلوکهای m ام و m ام، ظاهر شود که در اینجا شمارش از بلوک $\underline{1, 9, 8, 2}$ آغاز شده است و ممکن است m و n منفی باشند:

$$\dots \underline{3, 0, 4, 4}, \quad \underline{1, 9, 8, 2}, \quad \dots \frac{\underline{a, b, c, d}}{(m)} \quad \dots \frac{\underline{a, b, c, d}}{(n)} \dots$$

از آنجا که دنباله T را می توان به طور کامل با هریک از بلوکها ساخت، بلوکهای که درست پیش از تکرار $\underline{a, b, c, d}$ قرار دارند، یعنی بلوکهای که در مکانهای $(m-1)$ ام و $(n-1)$ ام واقع اند، باید با یکدیگر مساوی باشند. به همین ترتیب نتیجه می شود که بلوکهای واقع در مکانهای $(m-2)$ ام و $(n-2)$ ام مساوی اند و این نتیجه در تمام T درست است. بنابراین T متناوب است و نتیجه می شود که در حقیقت دنباله S بی نهایت بار شامل ۳، ۰، ۴ است.

مسئله ۲

هریک از خانه های شبکه ای مستطیلی به ابعاد 5×41 با یکی از دو رنگ قرمز و آبی رنگ شده است. ثابت کنید ۳ سطر و ۳ ستون در این شبکه وجود دارد که ۹ خانه حاصل از تقاطع آنها همرنگ اند.

راه حل

از آنجا که تنها از دو رنگ استفاده شده است، بنابر اصل لانه کبوتری در ستونی ۵ خانه ای یکی از رنگها باید دست کم در ۳ خانه به چشم آید. فرض کنید در مورد هریک از ۴۱ ستون شبکه این رنگ «برتر» را مشخص کرده ایم.

باز هم چون تنها از دو رنگ استفاده شده است، بین این ۴۱ رنگ برتر، یکی از رنگها دست کم به ۲۱ ستون مربوط می شود. فرض کنید بجز ۲۱ ستون که به یک رنگ برتر، مثلاً قرمز، هستند، بقیه را حذف کنیم.

در هریک از این ۲۱ ستون، سه سطر دلخواه که شامل خانه‌های قرمزند در نظر بگیرید (ممکن است بیش از ۳ سطر برای انتخاب کردن وجود داشته باشد). با حذف کردن دیگر خانه‌های این ستونها، به ۲۱ ستون می‌رسیم که هر کدام از آنها شامل ۳ خانهٔ قرمز در یکی از زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعهٔ ۵ عضوی سطرهاى خود است.

اکنون، فقط می‌توان $10 = \binom{5}{3}$ زیرمجموعهٔ ۳ تایی از ستونی ۵ سطری انتخاب کرد (یعنی $\{(3, 4, 5), (1, 2, 4), (1, 2, 3), \dots\}$). بنابراین، در گردایه‌ای متشکل از ۲۱ ستون، دست‌کم یکی از ۱۰ زیرمجموعهٔ ممکن، مثلاً (a, b, c) ، باید در ۳ ستون یا بیش از ۳ ستون مثلاً در ستونهای (c_1, c_2, c_3, \dots) ظاهر شود. (این مطلب، از شکل کلیتری از اصل لانه‌کبوتری به دست می‌آید: اگر $kn + 1$ شیء را در n جعبه توزیع کنیم، یکی از جعبه‌ها باید دست‌کم شامل $k + 1$ شیء باشد، زیرا در غیر این صورت مجموع کل اشیاء بیش از kn نیست، و این هم تناقض است.)

	c_1	c_2	c_3
a	*	*	*

b	*	*	*
c	*	*	*

بنابراین ۹ خانه در تقاطع این سطرها و ستونها همگی قرمزند.

تمرین

اگر تنها از ۳ رنگ استفاده کنیم و بخواهیم مطمئن شویم که زیرشبکه‌ای تکرنگ به ابعاد 4×4 وجود دارد، ابعاد آرایه را باید تا چه اندازهٔ بزرگ کنیم؟

راه‌حل

وقتی که استفاده از c رنگ مجاز است، برای حصول اطمینان از وجود شبکه‌ای تکرنگ به ابعاد $a \times a$ باید آرایه آنقدر بزرگ شود تا ابعادی برابر با $1 + c(a - 1)$ در

$$c \left[(a - 1) \left(\frac{c(a - 1) + 1}{a} \right) \right] + 1$$

داشته باشد. در مورد شبکه‌ای 4×4 و ۳ رنگ، آرایه‌ای به ابعاد 1891×10 و در مورد شبکه‌ای 5×5 و ۴ رنگ، آرایه‌ای به ابعاد 99009×17 لازم است.

دوره حل از اد دولیتل

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۷۰، ۷۱)

اینک به دو مسأله می‌پردازیم که از المپیاد بین‌المللی ۱۹۸۵ به یادگار مانده است. راه‌حلهای زیبایی زیر مربوط به اد دولیتل از دانشگاه تورنتوست. (مسأله اول را یکی از حل‌کنندگان باهوش مسأله‌های ریاضی، دانیل راب، از دانشگاه دولتی واشنگتن در شهر سنت‌لوییس ایالت میسوری نیز حل کرده است.)

۱. مسأله‌ای از رومانی

از آنجا که $\sqrt{2}$ عددی گنگ است، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ، $n\sqrt{2}$ هیچ‌گاه عددی صحیح نمی‌شود. در این مسأله، با دنباله‌ای از عددهای صحیح به‌نام S سروکار داریم که از مقادیر حاصل از $(n\sqrt{2})$ ها پس از حذف جزء کسری آنها به‌دست می‌آید، یعنی دنباله‌ای که از مقادیر $\{n\sqrt{2}\}$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$ تشکیل شده است.

سه جمله اول S عبارت‌اند از

$$[\sqrt{2}] = 1, \quad [2\sqrt{2}] = [2, 8\ldots] = 2, \quad [3\sqrt{2}] = [4, 24\ldots] = 4$$

توجه کنید که هریک از این مقادیر توانی از ۲ است. در مورد جمله ششم باز هم $[6\sqrt{2}] = [8, 48\ldots] = 8$ و نیز در مورد جمله دوازدهم $[12\sqrt{2}] = [16, 96\ldots] = 16$ ، که این دو هم توان ۲ هستند. برخی اوقات توانی از ۲ جا افتاده است، مانند ۶۴:

$$[45\sqrt{2}] = [63, 6\ldots] = 63, \quad [46\sqrt{2}] = [65, 05\ldots] = 65$$

با وجود این، ثابت کنید S شامل تعدادی نامتناهی از توانهای ۲ است.

راه‌حل

راه‌حل دولیتل کمتر از شاهکار نیست! او کار را با ذکر این مطلب آغاز می‌کند که مقدار $\sqrt{2}$ ، هنگامی که در دستگاه دودویی نوشته شود، شامل بی‌نهایت رقم ۱ است:

$$\sqrt{2} = 1,0110100\ldots$$

پس از کمی مرتب کردن به دست می آوریم

$$[(2^n\sqrt{2} - \{2^n\sqrt{2}\} + 1)\sqrt{2}] = 2^{n+1}$$

اینک، با حذف کردن جزء کسری از عدد فقط جزء صحیح آن باقی می ماند؛ در نتیجه

$$2^n\sqrt{2} - \{2^n\sqrt{2}\} = [2^n\sqrt{2}]$$

بنابراین

$$[(2^n\sqrt{2} + 1)\sqrt{2}] = 2^{n+1}$$

در نهایت با افزودن ۱ به $[x]$ ، جزء صحیح عدد $x + 1$ به دست می آید:

$$[x] + 1 = [x + 1]$$

بنابراین

$$[(2^n\sqrt{2} + 1)\sqrt{2}] = 2^{n+1}$$

به عبارت دیگر، اگر $k = [2^n\sqrt{2} + 1]$

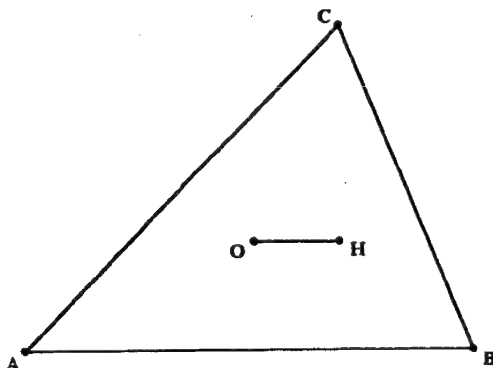
$$[k\sqrt{2}] = 2^{n+1}$$

که سمت راستش توانی از ۲ است. از آنجا که به وضوح به ازای n های مختلف k های مختلفی به دست می آید، مجموعه نامتناهی A دلیل بر وجود تعدادی نامتناهی از توانهای ۲ در دنباله S است.

۲. ترسیم هندسی

مسئله ای از اسپانیا

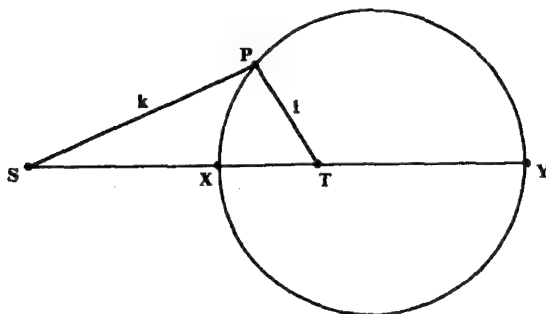
طبق معمول، فرض کنید مرکز دایره محیطی و مرکز ارتفاعی مثلث را به ترتیب با O و H نشان دهیم. مسئله این است که مثلث ABC را با توجه به اطلاعات اندک زیر درباره AB و OH رسم کنید: تمام آنچه برای شما مشخص شده طول AB و طول OH است و نیز اینکه این دو با هم موازی اند. (البته وضعیت نسبی آنها برای ما معلوم نیست).



شکل ۴۳

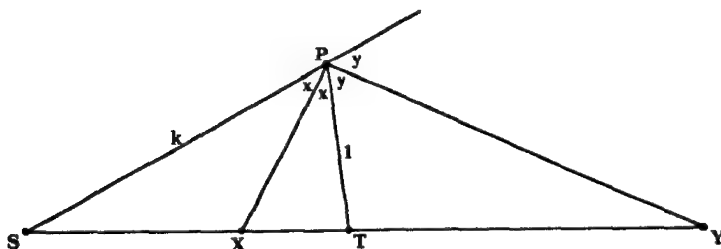
دایره آپولونیوس

راه حل شگفت‌انگیز دولیتل با مشخص کردن پاره خطی از AB ، که طولش معلوم است، آغاز می‌شود و سپس مکان نقطه O را نسبت به آن مشخص می‌کند به طوری که پس از آن کار ترسیم به آسانی خاتمه می‌یابد. یکی از مکانهای هندسی که به وضوح O روی آن قرار دارد عمود منصف AB است. مسأله، یافتن دومین مکان هندسی قابل ترسیمی است که از O می‌گذرد.



شکل ۴۴

به نظر می‌رسد که رسم نقطه‌ای مانند M با این ویژگی که فاصله O تا A دو برابر فاصله‌اش تا M است کار دشواری نیست. حال، بنابر کشف هندسه‌دان بزرگ یونان باستان، آپولونیوس پراگایی (۱۹۵ - ۲۶۲ ق.م.)، مکان هندسی نقطه‌ای مانند P که مسیر حرکت آن به گونه‌ای است که فاصله‌اش تا نقطه ثابتی مانند S همواره k برابر فاصله آن تا نقطه ثابتی مانند T است، دایره‌ای به قطر XY است که در آن X و Y نقاطی هستند که پاره خط ST را به نسبت درونی و بیرونی و به نسبت $۱ : k$ تقسیم می‌کنند. از آنجا که برای تقسیم پاره خطی به نسبت معلوم ستاره و پرگار کافی است، می‌توانیم دایره آپولونیوس را در مورد نقاط A و M و نسبت $۱ : ۲$ رسم کنیم، تا به این ترتیب دومین مکان هندسی که از O می‌گذرد مشخص شود. بیاید در اینجا کمی از موضوع منحرف شویم و این قضیه مفید آپولونیوس را ثابت کنیم.



شکل ۴۵

می‌خواهیم ثابت کنیم که هر نقطه‌ای مانند P که فاصله‌اش تا S ، k برابر فاصله آن تا T است، باید روی این دایره قرار داشته باشد و برعکس، هر نقطه‌ای روی این دایره باید فاصله‌اش تا S ، k برابر فاصله‌اش تا T باشد. این قسمت‌ها را به ترتیب ثابت می‌کنیم.

$$\text{الف) } PS = k \times PT$$

برهان این قسمت براساس این قضیه است که نیمسازهای داخلی و خارجی هر رأس مثلث ضلع مقابل آن را در نقاطی قطع می‌کنند که آن را به نسبت درونی و بیرونی و به نسبت دو ضلع دیگر مثلث تقسیم می‌کنند. با اتکا بر این قضیه، از شرط $PS = k \times PT$ بلافاصله نتیجه می‌شود

$$\frac{SX}{XT} = \frac{k}{1}, \quad \frac{SY}{TY} = \frac{k}{1}$$

نقطه P به هر ترتیبی که تحت شرط $PS = k \times PT$ تغییر کند، نیمساز $\angle SPT$ همواره ضلع ST را به نسبت $1 : k$ تقسیم می‌کند، و در نتیجه همواره از نقطه X می‌گذرد. به همین ترتیب، نیمساز خارجی نیز همواره از نقطه Y می‌گذرد و بدیهی است که $\angle XPY$ همواره نصف زاویه نیمصفحه، یعنی قائمه، است و در نتیجه P همواره روی دایره‌ای به قطر XY قرار دارد.

ب) P نقطه‌ای روی دایره به قطر XY است.

اثبات عکس قضیه جالبتر است. این بار، بنابر تعریف X و Y می‌دانیم که پاره خط ST را به نسبت درونی و بیرونی و به نسبت $1 : k$ تقسیم می‌کنند و می‌خواهیم ثابت کنیم $PS = k \times PT$ دست‌کم از قائمه بودن P نتیجه می‌شود که مجموع θ و ϕ ، اندازه زاویه‌های X و Y در $\triangle XPY$ ، برابر با قائمه است. اگر با رسم TU به موازات PX و TV به موازات PY این زاویه‌ها را بازسازی کنیم، $\angle VTU$ نیز قائمه می‌شود.

این خطهای موازی به ترتیب زیر قسمت‌های پاره خط SU را تقسیم می‌کنند:

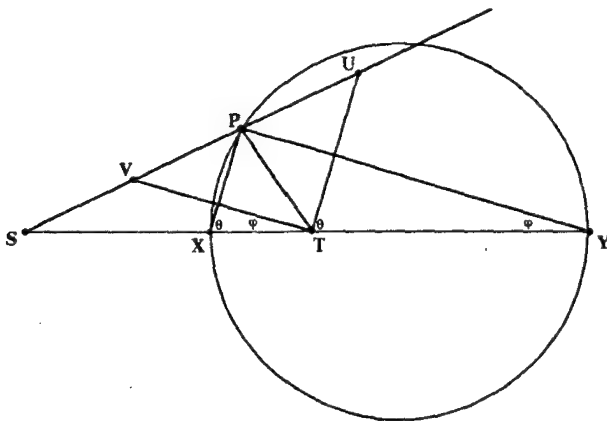
$$\frac{SX}{XT} = \frac{SP}{PU} = \frac{k}{1}, \quad \frac{SP}{TY} = \frac{SP}{VP} = \frac{k}{1}$$

در نتیجه $\frac{SP}{PU} = \frac{SP}{VP}$ و یا $PU = VP$ ، و این یعنی P وسط وتر مثلث قائم‌الزاویه VTU است. از آنجا که P مرکز دایره محیطی این مثلث است، از هر سه رأس آن به یک فاصله است و در نتیجه $PT = PU$. در نهایت اگر بدانیم $\frac{SP}{PU} = \frac{k}{1}$ ، آنگاه $\frac{SP}{PT} = \frac{k}{1}$. اینک به ترسیم مثلث ABC می‌پردازیم.

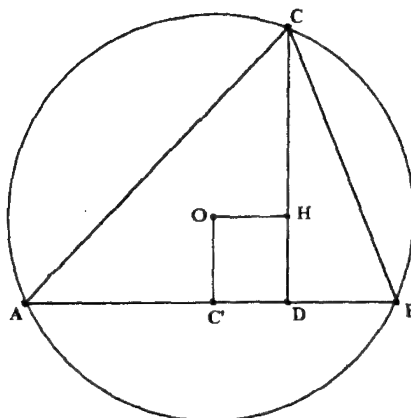
راه حل

از آنجا که مرکز دایره محیطی، O ، نقش مهمی در اطلاعات داده شده دارد، توجه کردن به دایره محیطی موجه به نظر می‌رسد. ارتفاع CH و نیز OC' ، عمود منصف AB ، پاره خط AB را تحت زاویه قائمه قطع می‌کنند (شکل ۴۷ را ببینید). بنابراین HD و OC' با هم موازی‌اند. چون OH و AB نیز با هم موازی‌اند، چهارضلعی $OC'DH$ مستطیل و در نتیجه طول $C'D$ برابر با طول OH است که مقدارش معلوم است. بنابراین می‌توانیم نقطه C' ، وسط AB ، را تعیین کنیم و به اندازه طول OH از C' دور شویم تا نقطه

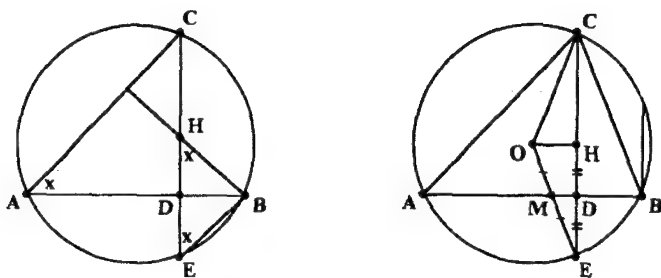
D را بیابیم. بنابراین، یکی از مکانهای هندسی قابل ترسیمی که از رأس سوم، C ، می‌گذرد عمودی است که در نقطه D بر AB رسم شود. همان‌طور که خواهیم دید دومین مکان هندسی که از نقطه C می‌گذرد، و جای C را روی این خط عمود مشخص می‌کند، خود دایره محیطی مثلث است. به این ترتیب مسأله به تعیین جای نقطه O منجر می‌شود. البته برای حل این مسأله نیازمند یافتن دو مکان هندسی هستیم که از نقطه O بگذرند. همان‌طور که گفتیم این مکانها عمود منصف AB و دایره آپولونیوس‌اند. بالاخره به مسأله تعیین محل نقطه اسرارآمیز M رسیدیم که در بحث قبل با آن برخورد کردیم.



شکل ۴۶



شکل ۴۷



شکل ۴۸

می‌خواهیم از این ویژگی جالب توجه استفاده کنیم که اگر ارتفاع CD را آنقدر ادامه دهیم که دایره محیطی مثلث را در نقطه E قطع کند، آنگاه پای ارتفاع، D ، وسط HE است؛ به عبارت دیگر، $HD = DE$ (شکل ۴۸ را ببینید). در صورتی که ثابت کنیم $\triangle BHE$ به دلیل برابر بودن زاویه‌های مجاور به قاعده‌اش، E و H ، متساوی‌الساقین است، این مطلب به‌زیبایی ثابت می‌شود (زیرا در این صورت ارتفاع BD قاعده را نصف می‌کند). برای اثبات این مطلب، کافی است توجه کنیم که هریک از این زاویه‌های مجاور به قاعده با زاویه A در مثلث برابر است:

بدیهی است که زاویه‌های A و E مقابل به کمان BC از دایره محیطی‌اند و ارتفاع BH بر AC عمود است، ضلعهای زاویه H به ترتیبی بر ضلعهای زاویه A عمودند (دورانی به‌اندازه 90° حول H موجب می‌شود که ضلعهای زاویه H با ضلعهای AC و AB موازی شوند).

بنابراین D وسط HE است و چون DA با OH موازی است، در $\triangle OHE$ ، ضلع OE پاره‌خط AD را در نقطه وسطش، M ، قطع می‌کند (خطی که از وسط یکی از ضلعهای مثلث به موازات ضلع دیگر رسم شود ضلع سوم را نصف می‌کند). بنابراین فاصله O تا M برابر با نصف شعاع OE است درحالی‌که طول OA برابر با شعاع دایره است. بنابراین O باید بر دایره آپولونیوس متناظر دو نقطه ثابت A و M و به نسبت $2:1$ قرار گیرد.

باید توجه کنیم که هنوز جای نقطه M را تعیین نکرده‌ایم. با این حال، به‌سادگی می‌توان این کار را انجام داد، به این ترتیب که توجه کنید DM ، که در $\triangle OHE$ وسط ضلعهای HE و OE را به هم وصل می‌کند، نصف ضلع OH و موازی با آن است. در نتیجه، می‌توان M را با جدا کردن طولی به‌اندازه نصف طول OH روی DA و از طرف D رسم کرد، و همان‌طور که انتظار داشتیم ترسیم $\triangle ABC$ پایان می‌پذیرد.

مسأله‌ای از المپیاد اسپانیا، ۱۹۸۷

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۱۳۲. راه حل دیگری در ۱۹۹۰، ۷۲ آمده است.)

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید معادله

$$P_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1 = 0$$

دقیقاً یک ریشه مانند c_n بین 0 و 1 دارد و مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ را به‌دست آورید.

راه حل

از آنجا که مجموع ضریبها برابر است با $1 - 2 + 1 = 0$ ، یکی از $x = 1$ یکی از $n + 2$ ریشه معادله و $x - 1$ یکی از عاملهای $x^{n+2} - 2x + 1$ است. پس ریشه موردنظر در فاصله 0 و 1 مربوط به عامل دیگر $x^{n+2} - 2x + 1$ است و این مطلب ما را بر آن می‌دارد که این عامل را بیابیم. به‌هر حال این کار را می‌توان انجام داد (یکی از رهیافتهای تقسیم طولانی است). به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که نتیجه به‌شکل زیر است

$$x^{n+2} - 2x + 1 = (x - 1)(x^{n+1} + x^n + \dots + x - 1)$$

(به جمله -1 در انتها توجه کنید). بنابراین $n + 1$ ریشه دیگر معادله ریشه‌های معادله زیرند:

$$Q_n(x) = x^{n+1} + x^n + \dots + x - 1 = 0$$

اکنون، $Q_n(0) = -1$ و چون $n + 1 \geq 2$ ، $Q_n(1) \geq 1 + 1 - 1 > 0$. از آنجا که چندجمله‌ایها

پیوسته‌اند، بنابر قضیه مقدار میانی به‌ازای x ای بین 0 و 1 ، $Q_n(x) = 0$. بنابراین، معادله $P_n(x) = 0$ ریشه‌ای مانند c_n بین 0 و 1 دارد.

به‌آسانی معلوم می‌شود تنها ریشه‌ای از $Q_n(x) = 0$ که بین 0 و 1 واقع است، همین c_n است.

هر ریشه‌ای مانند x از این نوع در معادله

$$x^{n+1} + x^n + \dots + x = 1$$

صدق می‌کند. در مورد ریشه دیگری مانند y بین 0 و 1 باز هم

$$y^{n+1} + y^n + \dots + y = 1$$

حال اگر $x < y$ ، آنگاه همیشه $y^k < x^k$ و در نتیجه

$$y^{n+1} + y^n + \dots + y < x^{n+1} + x^n + \dots + x = 1$$

که تناقض است. به همین ترتیب این فرض که $y > x$ به تناقض می‌انجامد. با وجود این، هنوز باید

ثابت کنیم این فرض که $y = x$ نیز درست نیست، به عبارت دیگر، $x = c_n$ ریشه‌ای مضاعف نیست.

ریشه مضاعف ریشه معادله‌ای است که از مشتق‌گیری $P_n(x) = 0$ به دست می‌آید (این نتیجه معادل با این است که نمودار $y = P_n(x)$ بر محور x ها مماس است). اگر c_n ریشه‌ای مضاعف باشد، آنگاه برابریهای

$$c_n^{n+2} - 2c_n + 1 = 0$$

و

$$(n+1)c_n^{n+1} - 2 = 0$$

هر دو درست‌اند. از برابری دوم به دست می‌آوریم

$$2 = (n+2)c_n^{n+1}$$

و اگر در برابری اول به جای 2 مقدارش را از این برابری جایگزین کنیم حاصل می‌شود

$$c_n^{n+2} - (n+2)c_n^{n+2} + 1 = 0$$

و در نتیجه

$$1 = (n+1)c_n^{n+2}$$

و یا

$$c_n^{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

بنابراین اولین برابری به صورت زیر است

$$\frac{1}{n+1} - 2c_n + 1 = 0$$

و در نتیجه

$$c_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + 1 \right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

و نیز به دست می‌آوریم

$$c_n^{n+2} = \left(\frac{n+2}{2(n+1)} \right)^{n+2}$$

با مساوی هم قرار دادن این دو مقدار از c_n^{n+2} به دست می‌آوریم

$$\left(\frac{n+2}{2(n+1)}\right)^{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

$$(n+2) \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = 2^{n+2}$$

و در نتیجه

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{2^{n+2}}{n+2}$$

اینک معلوم است که طرف چپ این برابری کمتر از $e = 2,718 \dots$ پایه لگاریتم طبیعی، است و در نتیجه

$$\frac{2^{n+2}}{n+2} < 3$$

و یا $2^{n+2} < 3n+6$ که مطمئناً به‌ازای $n = 2, 3, \dots$ نادرست است. بنابراین به‌ازای $n \geq 2$ ، $x = c_n$ ریشه مضاعف $P_n(x) = 0$ نیست. با حل کردن معادله $P_1(x) = 0$ سه ریشه متمایز به دست می‌آوریم و نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر m, n ریشه‌ای مضاعف نیست:

$$P_1(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$$

که در نتیجه $x = 1$ و $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. بنابراین به‌ازای هر m, n تنها ریشه معادله $P_n(x) = 0$ است که بین ۰ و ۱ قرار دارد.

اینک از برابری

$$c_n^{n+2} - 2c_n + 1 = 0$$

به دست می‌آوریم

$$c_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} c_n^{n+2}$$

و در نتیجه به‌ازای هر m

$$c_n > \frac{1}{2}$$

در اینجا وسوسه می‌شویم که کار را با اثبات نتیجه زیر تمام کنیم: از

$$c_n < 1, \quad c_n^{n+2} - 2c_n + 1 = 0$$

نتیجه می‌شود، وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $c_n^{n+2} \rightarrow 0$ و در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{2}$$

مشکلی که در اینجا وجود دارد این است که مقدار c_n با تغییر n تغییر می‌کند و آنچه می‌دانیم این است که می‌توان c_n را با تابعی شبیه به

$$c_n = 1 - \frac{1}{n}$$

به‌طور قابل قبولی مشخص کرد، که در این حالت c_n ها به ۱ میل می‌کنند. روشن است که باید این امر را دقیقتر بررسی کنیم.

به کمک استدلالی که پیش از این به‌کار بردیم می‌توانیم با کمی کوشش ثابت کنیم که با افزایش n ، c_n کاهش می‌یابد. از آنجا که c_n ریشه معادله $Q_n(x) = 0$ است،

$$c_n^{n+1} + c_n^n + \dots + c_n = 1$$

و به همین ترتیب

$$c_{n+1}^{n+2} + c_{n+1}^{n+1} + \dots + c_{n+1} = 0$$

اینک اگر c_{n+1} بزرگتر از c_n یا مساوی با آن باشد، همیشه $c_{n+1}^k \geq c_n^k$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} c_{n+1}^{n+2} + (c_{n+1}^{n+1} + \dots + c_{n+1}) &\geq c_{n+1}^{n+2} + (c_n^{n+1} + \dots + c_n) \\ &= c_{n+1}^{n+2} + 1 > 1 \end{aligned}$$

که تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$c_n < c_{n+1}$$

و

$$c_n < c_1, \quad n > 1$$

پس به‌ازای $n > 1$

$$\frac{1}{4} < c_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}c_n^{n+2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4}c_1^{n+2}$$

که در آن c_1 مقدار ثابتی کوچکتر از ۱ است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که دقیقاً

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{4}$$

مسأله‌ای از یوهان والتر

طرح مسأله زیبای زیر را مدیون یوهان والتر (مؤسسه ریاضیات، آخن، آلمان) هستیم.

ثابت کنید عددهایی طبیعی و فرد مانند x ، y و z وجود ندارند که در رابطه فیثاغورسی زیر صدق کنند

$$(x + y)^2 + (x + z)^2 = (y + z)^2$$

دکتر والتر چهار راه حل زیر را برای این مسأله عرضه کرده است. این راه‌حلها از رهیافتی مستقیم و ساده آغاز شده و به یورش‌های نسبتاً پیچیده می‌انجامند. در هریک از آنها حکم مسأله از طریق رسیدن به تناقض به دست می‌آید.

ساده‌ترین راه حل

در صورتی که عددهایی طبیعی و فرد مانند

$$x = 2a + 1, \quad y = 2b + 1, \quad z = 2c + 1$$

در رابطه فیثاغورسی مورد نظر صدق کنند، آنگاه

$$(2a + 2b + 2)^2 + (2a + 2c + 2)^2 = (2b + 2c + 2)^2$$

$$(a + b + 1)^2 + (a + c + 1)^2 = (b + c + 1)^2$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + 1 + 2ab + 2a + 2b) + (a^2 + c^2 + 1 + 2ac + 2a + 2c) \\ = b^2 + c^2 + 1 + 2bc + 2b + 2c \end{aligned}$$

$$2a^2 + 2ab + 2ac + 4a + 1 = 2bc$$

که تناقض است، زیرا عددی فرد با عددی زوج برابر شده است.

زیباترین راه حل (از د. کنیپرت، آخن)
اگر عددهای طبیعی و فرد x ، y و z در برابری

$$(x+y)^2 + (x+z)^2 = (y+z)^2$$

صدق کنند، آنگاه

$$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 + 2xz + z^2) = y^2 + 2yz + z^2$$

$$x^2 + xy + xz = yz$$

با افزودن yz به دو طرف این برابری حاصل می‌شود

$$(x+y)(x+z) = 2yz$$

ولی این برابری ناممکن است، زیرا $x+y$ و $x+z$ هردو زوج‌اند و در نتیجه طرف چپ مضرب ۴ است درحالی‌که طرف راست تنها بر ۲ بخش‌پذیر است، زیرا y و z هردو فردند.

شکل دیگری از راه حل کنیپرت (از ی. والتر)
کار را از برابری

$$x^2 + xy + xz = yz$$

در راه حل دوم دنبال می‌کنیم. با انتقال xz به طرف دیگر و فاکتورگیری به دست می‌آوریم

$$x(x+y) = z(y-x)$$

و در نتیجه

$$x \times \frac{x+y}{4} = z \times \frac{y-x}{4}$$

چون $x+y$ و $y-x$ هردو زوج‌اند، کسرهای $\frac{x+y}{4}$ و $\frac{y-x}{4}$ عددهایی صحیح‌اند و تا اینجا به نظر می‌رسد که همه چیز درست است. ولی این برابری در حقیقت برابری بین عددی فرد و عددی زوج است، زیرا زوجیت $\frac{x+y}{4}$ و $\frac{y-x}{4}$ متفاوت است، به این دلیل که تفاضل آنها برابر با عدد فرد x است.

رهیافتی نسبتاً پیچیده‌تر

قضیهٔ اساسی سه‌تاییهای فیثاغورسی این است که (p, q, r) سه‌تایی فیثاغورسی است اگر و تنها اگر عددهایی طبیعی مانند k ، m و n موجود باشند به‌طوری‌که m و n نسبت به هم اول باشند، یکی از دو عدد m و n زوج و دیگری فرد باشد و

$$p = 2kmn, \quad q = k(m^2 - n^2), \quad r = k(m^2 + n^2)$$

اگر $(p, q, r) = (x + y, x + z, y + z)$ آنگاه

$$x + y = 2kmn, \quad x + z = k(m^2 - n^2), \quad y + z = k(m^2 + n^2)$$

اینک اگر x, y و z هر سه فرد باشند، آنگاه $x + z$ زوج است و در نتیجه $k(m^2 - n^2)$ عددی صحیح و زوج است. از طرفی زوجیت m و n متفاوت و در نتیجه $m^2 - n^2$ فرد است. بنابراین k باید زوج باشد. در این حالت،

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[(x + y) + (x + z) - (y + z)] &= \frac{1}{4}[2kmn + k(m^2 - n^2) - k(m^2 + n^2)] \\ x &= k(mn - n^2) \end{aligned}$$

که بازهم برابری بین دو عدد صحیح است یکی فرد و یکی زوج.

بنابر گفته دکتر والتر انگیزه در نظر گرفتن عبارت طرف چپ این معادله این نتیجه است که

$$\frac{1}{4}[\text{وتر - مجموع دو ساق}]$$

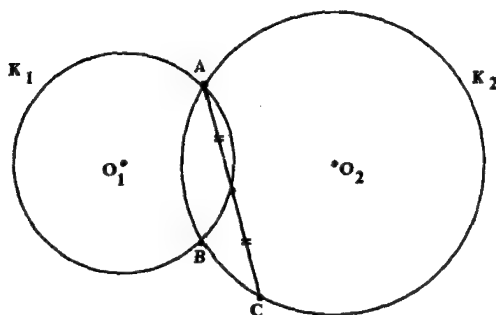
برابر با شعاع دایره محاطی در مثلث فیثاغورسی است (مثلث فیثاغورسی، مثلثی قائم الزاویه است که طول ضلعهایش عددهایی صحیح اند) و می دانیم که چنین شعاعی باید عددی صحیح باشد.

مسأله‌ای از المپیاد بالکان، ۱۹۸۷

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۲۹۰)

مسأله‌ای از بلغارستان

دو دایره K_1 و K_2 به ترتیب به مرکز O_1 و O_2 و به شعاع ۱ و $\sqrt{2}$ در نقاط A و B متقاطع‌اند. AC وترى از K_2 است که K_1 آن را نصف کرده است. با فرض اینکه فاصله O_1 تا O_2 برابر با ۲ واحد است طول AC را به دست آورید.



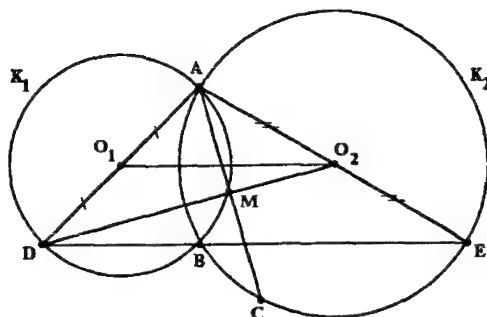
شکل ۴۹

راه حل

به طور کلی، هنگامی که دو دایره متقاطع‌اند یکی از ایده‌های مناسب این است که به قطرهایی که از یکی از نقاط برخورد می‌گذرند توجه کنیم، زیرا پاره خطی که دو سر دیگر این قطرها را به هم وصل می‌کند از نقطه برخورد دیگر دایره‌ها می‌گذرد. بنابراین در شکل ۵۰، DE از B می‌گذرد (زیرا در هر دو دایره زاویه‌های محاذی به رأس B و مقابل به قطرهای دایره‌ها قائمه‌اند). همچنین پاره خط O_1O_2 که مرکزها

را به هم وصل می‌کند وسط ضلعهای AD و AE از مثلث ADE را نیز به هم متصل می‌کند، و در نتیجه طولش برابر با نصف DE است. چون $O_1O_2 = 2$ ، پس $DE = 4$ و به این ترتیب طول هر سه ضلع مثلث ADE را می‌دانیم:

$$AD = 2, \quad AE = 2\sqrt{2}, \quad DE = 4$$



شکل ۵۰

اگر دایره K_1 را در M قطع کند، مثلث AMD قائم‌الزاویه می‌شود، و در نتیجه پاره خط DO_2 که از مرکز K_2 می‌گذرد بر وتر AMC عمود است. بنابراین M وسط این وتر است و در حقیقت همان وتری است که می‌خواهیم طولش را بیابیم. چون $AC = 2AM$ ، طول AM را به دست می‌آوریم.

از آنجا که AM ارتفاع $\triangle ADO_2$ است، پس

$$\frac{1}{4} DO_2 \times AM = \text{مساحت } \triangle ADO_2$$

و در نتیجه

$$AM = \frac{2(\text{مساحت } \triangle ADO_2)}{DO_2}$$

اکنون، DO_2 میانه $\triangle ADE$ است و در نتیجه مساحت $\triangle ADE$ را نصف می‌کند. بنابراین

$$AM = \frac{\text{مساحت } \triangle ADE}{DO_2}$$

در اینجا بخش عمده مسأله حل شده است، زیرا مساحت و طول میانه با دانستن اندازه سه ضلع مثلث به سادگی حساب می‌شوند.

الف) نصف محیط $\triangle ADE$ برابر است با $s = \frac{1}{4}(2 + 2\sqrt{2} + 4) = 3 + \sqrt{2}$ و در نتیجه بنابر دستور هرون،

$$\text{مساحت } \triangle ADE = \sqrt{(3 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2})} = \sqrt{7}$$

ب) با استفاده از قانون کسینوسها در $\triangle ADE$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{AD^2 + AE^2 - DE^2}{2AD \times AE} \\ &= \frac{4 + 8 - 16}{8\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

به همین ترتیب، با استفاده از قانون کسینوسها در $\triangle ADO$ ،

$$\begin{aligned}DO^2 &= AD^2 + AO^2 - 2AD \times AO \cos A \\ &= 4 + 2 + 4\sqrt{2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} = 8\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$DO = \sqrt{8}$$

در نهایت

$$AM = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$$

و در نتیجه

$$AC = 2AM = \sqrt{\frac{8}{2}}$$

مسائلی از دوره‌های مختلف مسابقات کورشاک

۱. مسأله‌ای از مسابقه سال ۱۹۸۲

(راه‌حل دیگری در کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۹، ۲۲۸ آمده است.)

فرض کنید هریک از عددهای صحیح را با یکی از ۱۰۰ رنگ مختلف طوری رنگ آمیزی کرده‌ایم که الف) هر کدام از این ۱۰۰ رنگ واقعاً به‌کار رفته است، و

ب) در صورتی که طول دو بازه مانند $[a, b]$ و $[c, d]$ ، که نقاط انتهایی آنها عددهایی صحیح‌اند، برابر باشد، و هر دو از طرف چپ هم‌رنگ باشند (یعنی a و c هم‌رنگ باشند) و هر دو از طرف راست هم‌رنگ باشند (یعنی b و d هم‌رنگ باشند؛ ممکن است این رنگ با رنگ a و c یکی باشد یا نباشد)، آنگاه، هر دو بازه با همین رنگ رنگ‌آمیزی شده باشند؛ یعنی، به‌ازای هر عدد صحیح مانند x در فاصله $a - b \leq x \leq c$ ، دو عدد $a + x$ و $c + x$ هم‌رنگ باشند.



شکل ۵۱

ثابت کنید که عددهای ۱۹۸۲- و ۱۹۸۲+ باید رنگهای مختلفی داشته باشند.

راه‌حل

قسمت ۱

جفتی از عددهای صحیح را که رنگ یکسانی دارند جفتی تکرنگ و فاصله بین آنها را فاصله‌ای تکرنگی می‌نامیم. دو جفت تکرنگ مانند (a, b) و (c, d) به‌ترتیب به رنگهای i و j در نظر بگیرید، i و j یکسان‌اند یا متفاوت، به‌طوری که فاصله تکرنگی هر دو برابر با s باشد (شکل ۵۲ را ببینید). در این

حالت طول بازه‌های $[a, c]$ و $[b, d]$ برابر است و این دو بازه در شرط (ب) که در صورت مسئله آمده است صدق می‌کنند، و در نتیجه رنگ‌آمیزی هر دو بازه یکسان است. بنابراین،

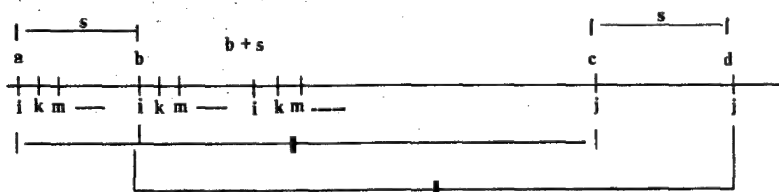
عددهای $a+1$ و $b+1$ باید هم‌رنگ باشند (به رنگ k).

عددهای $a+2$ و $b+2$ باید هم‌رنگ باشند (به رنگ m).

.....

عددهای b و $b+s$ باید هم‌رنگ باشند (بازهم به رنگ i).

عددهای $b+1$ و $b+s+1$ باید هم‌رنگ باشند (بازهم به رنگ k) والی آخر.



شکل ۵۲

بنابراین $[a, c]$ باید با بلوکهای مجاور هم به طول s که رنگ‌آمیزی آنها درست مانند رنگ‌آمیزی بازه $[a, b]$ است رنگ شده باشد. (اگر طول $[a, c]$ برابر با $q \times s + r$ باشد، که در آن $0 \leq r < s$ ، چنین بلوکهایی q بار در $[a, c]$ وجود دارند و به دنبال آنها r عدد صحیح قرار دارند که به عنوان بخشی از بلوک در انتها قرار دارند.)

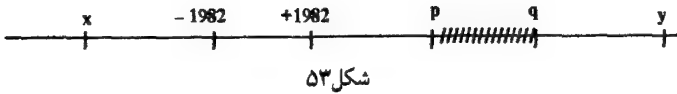
قسمت ۲

از آنجا که تنها ۱۰۰ رنگ وجود دارد، بنابر اصل لانه‌کبوتری هر بازه‌ای متشکل از ۱۰۱ عدد صحیح باید شامل دو عدد صحیح هم‌رنگ باشد. چون ۱۰۱ عدد صحیح متوالی بازه‌ای به طول ۱۰۰ را اشغال می‌کنند، پس هر بازه‌ای به طول ۱۰۰ دست‌کم یک فاصلهٔ تکرنگی مانند d در مجموعهٔ محدود $\{1, 2, \dots, 100\}$ ایجاد می‌کند. از این رو، هر بازهٔ نامتناهی روی محور اعداد که شامل تعداد بی‌شماری از زیربازه‌های مجاور هم به طول ۱۰۰ است، بی‌نهایت فاصلهٔ تکرنگی کراندار از این نوع پدید می‌آورد. در نتیجه دست‌کم یکی از این فاصله‌ها باید بی‌نهایت بار در این بازه تکرار شود.

قسمت ۳

از آنجا که هریک از ۱۰۰ رنگ واقعاً به‌کار رفته است، به‌ازای هر رنگ عدد صحیحی به همان رنگ انتخاب و فرض می‌کنیم که $[p, q]$ بازه‌ای متناهی باشد که شامل همهٔ این عددهای صحیح است. فرض کنید $[x, y]$ بازه‌ای باشد که شامل هر دو بازهٔ $[p, q]$ و $[-1982, +1982]$ است (ممکن است

بازه دوم در بازه اول قرار داشته باشد) و نیز در دو طرف این بازه‌ها شامل محدوده‌ای از دست‌کم ۱۰۰ عدد صحیح است (شکل ۵۳ را ببینید).



شکل ۵۳

بنابر قسمت (۲) در بالا، بازه نامتناهی $[y, \infty)$ فاصله‌ای تکرنگی مانند d_1 پدید می‌آورد که بی‌نهایت بار ظاهر می‌شود، و به همین ترتیب بازه $(-\infty, x]$ فاصله‌ای تکرنگی مانند d_2 دارد که بی‌نهایت بار ظاهر می‌شود. همچنین d_1 و d_2 هر دو در مجموعه $\{1, 2, \dots, 100\}$ قرار دارند.

اینک فرض کنید (a, b) و (c, d) دو جفت تکرنگ در $[y, \infty)$ به فاصله d_1 باشند. از آنجا که بی‌نهایت بازه از این نوع در $[y, \infty)$ وجود دارد، می‌توانیم دو بازه مجزا از اینها را طوری انتخاب کنیم که فاصله‌شان از یکدیگر به اندازه دلخواه زیاد باشد. همان‌طور که در قسمت (۱) در بالا ثابت کردیم، عددهای صحیح بین $[a, b]$ و $[c, d]$ به صورت بلوکهای متوالی به رنگهای بازه $[a, b]$ رنگ‌آمیزی شده‌اند. بنابراین، اگر $[a, b]$ و $[c, d]$ را به اندازه کافی دور از هم انتخاب و چنین بلوکهای مجاور به طول d_1 را با هم ترکیب کنیم، می‌بینیم که در بازه نامتناهی $[y, \infty)$ ، فاصله‌های تکرنگی برابر با هر مضرب متناهی از d_1 مانند kd_1 وجود دارد (شکل ۵۴ را ببینید). به همین ترتیب در بازه $(-\infty, x]$ فاصله‌های تکرنگی وجود دارد که طول آنها برابر است با همه مضربهای متناهی فاصله d_2 که در آن بی‌نهایت بار ظاهر شده است.

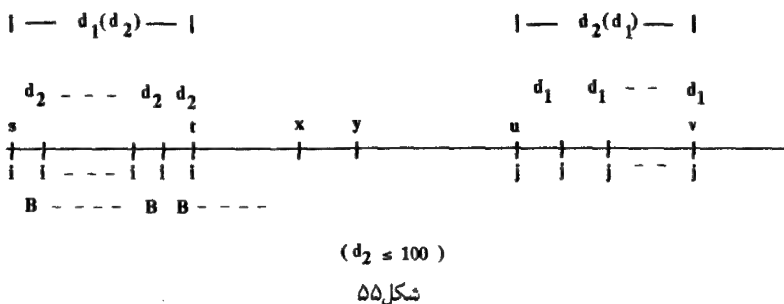


شکل ۵۴

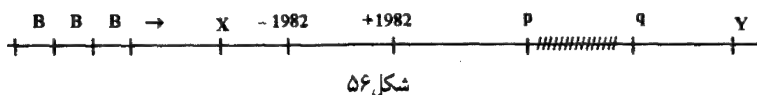
از اینجا نتیجه می‌شود که مضرب تکرنگی $d_1 \times d_2$ در $[y, \infty)$ و نیز مضرب تکرنگی برابر با آن، یعنی $d_1 \times d_2$ در $(-\infty, x]$ وجود دارد، و در نتیجه دو جفت تکرنگ (s, t) و (u, v) موجودند که فاصله هریک از آنها برابر با $d_1 d_2$ است و در دو طرف بازه $[x, y]$ قرار دارند (شکل ۵۵ را ببینید).

قسمت ۴

از بحث بالا نتیجه می‌شود که طول بازه‌های $[s, u]$ و $[t, v]$ یکی است و، بنابر شرط (ب)، با یک رنگ رنگ‌آمیزی شده‌اند. همان‌طور که در قسمت (۱) در بالا گفتیم، عددهای صحیحی که از s آغاز می‌شوند، با تکرار رنگهای بلوک $[s, t]$ و به صورت بلوکهای مجاور هم رنگ‌آمیزی شده‌اند ولی $[s, t]$



با کنار هم قرار دادن d_1 نسخه از بلوک B به طول d_2 رنگ آمیزی شده است. بنابراین، در سرتاسر بازه $[s, u]$ ، رنگ آمیزی به وسیله کنار هم قرار دادن نسخه‌های بلوک B انجام شده است. از آنجا که s و u در دو طرف بازه $[x, y]$ قرار دارند، تمام بازه $[x, y]$ به وسیله کنار هم قرار دادن نسخه‌های B رنگ آمیزی شده است و در نتیجه رنگهایی که در $[x, y]$ وجود دارند از رنگهای B هستند. ولی $[x, y]$ شامل $[p, q]$ است که خود 100 رنگ را دربر دارد. در نتیجه، B باید شامل تمام رنگها باشد و چون طول این بازه برابر با d_2 است و $d_2 \leq 100$ ، نتیجه می‌گیریم که $d_2 = 100$ ، و بنابراین B ترتیب ثابتی از 100 رنگ مختلفی است که در اختیار داریم.



چون $[x, y]$ که شامل بازه $[-1982, +1982]$ و محدوده‌ای از دست‌کم 100 عدد صحیح در دو طرف آن است، به وسیله این نسخه‌های مجاور هم B رنگ آمیزی شده است، پس رنگی که در مورد عدد -1982 به کار رفته است و در بازه‌های 100 تایی وجود دارد، باید در عددهای صحیح زیر نیز یافت شود

$$-1882, -1782, \dots, -82, 18, 118, \dots, 1918, 2018,$$

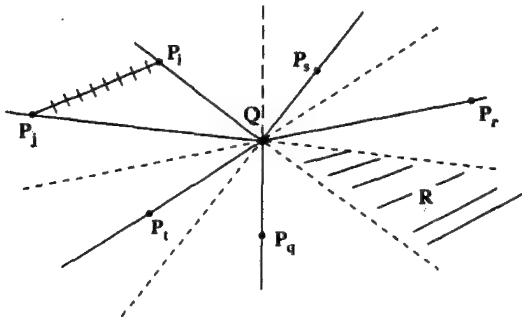
ولی این رنگ در هیچ عدد صحیحی بین آنها و به ویژه در عدد $+1982$ وجود ندارد.

۲. مسأله‌ای از مسابقه سال ۱۹۸۳

n نقطه P_1, P_2, \dots, P_n و نیز نقطه Q در صفحه مفروض‌اند. اگر این نقطه‌ها طوری قرار گرفته باشند که به ازای هر جفت مانند (P_i, P_j) نقطه سوم P_k موجود باشد به طوری که مثلث $P_i P_j P_k$ کامل شده و نقطه Q را درون خود داشته باشد، ثابت کنید که n باید فرد باشد.

راه حل

فرض کنید n نیمخط QP_1, QP_2, \dots, QP_n با رنگ آبی و تصویر آنها تحت نیمدور حول نقطه Q با رنگ قرمز رنگ آمیزی شده باشد (در شکل ۵۷ تصویر نیمخطها به صورت نقطه چین رسم شده است). بدیهی است که این n نیمخط آبی به همراه تصویرهای قرمز نظیرشان n خط راست تشکیل می‌دهند.



شکل ۵۷

اینک فرض کنید در بادبزی که دور نقطه Q درست شده است، دو نیمخط آبی مانند QP_i و QP_j پشت سرهم آمده باشند. در این حالت نقطه P_k که مثلث $P_i P_j P_k$ را کامل می‌کند و نقطه Q درون آن قرار می‌گیرد، باید در R ، یعنی ناحیه بین تصویرهای قرمز رنگ QP_i و QP_j ، قرار داشته باشد. ولی چون این تصویرهای قرمز در بادبزن پشت سرهم اند، هیچ نیمخط آبی بین آنها قرار ندارد و در نتیجه، برخلاف فرض مسأله، هیچ نقطه‌ای مانند P_k وجود ندارد که جفت (P_i, P_j) را کامل کند. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که هیچ دو نیمخط آبی در بادبزن پشت سرهم نیستند.

اینک، فرض کنید همه خطهای شکل را حذف و بعد شروع کنیم به اینکه دوباره آنها را به ترتیبی تک تک به شکل بازگردانیم. فرض کنید که در هر مرحله از این کار، با رشد تدریجی بادبزن، حساب تعداد جفت نیمخطهای آبی، b ، را نگه داریم. هنگامی که l ، تعداد خطها، ۲ است، بدیهی است که b باید برابر با ۱ باشد (شکل ۵۸ را ببینید). از این مرحله به بعد، فقط سه روش وجود دارد که بتوانیم خطی را به پیکربندی بیفزاییم:

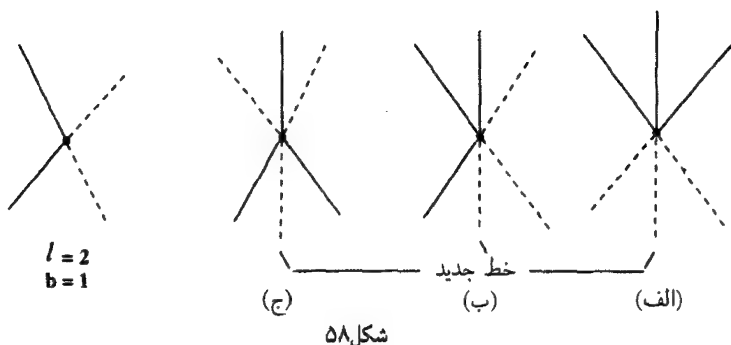
نیمخط آبی مربوط به خط جدید باید به یکی از صورتهای زیر در بادبزن قرار گیرد:

(الف) بین دو نیمخط آبی متوالی،

(ب) بین نیمخطی آبی و نیمخطی قرمز،

(ج) بین دو نیمخط قرمز متوالی.

با توجه به شکل ۵۸ به آسانی نتیجه می‌شود که



شکل ۵۸

در حالت (الف)، b به $b + 1$ افزایش می‌یابد زیرا دو جفت آبی متوالی پدید می‌آید، درحالی‌که جفتی دیگر از بین می‌رود؛

در حالت (ب)، باز هم با پدید آمدن یک تک‌جفت آبی جدید، b به $b + 1$ افزایش می‌یابد؛

در حالت (ج)، b به $b - 1$ کاهش می‌یابد، زیرا یک جفت آبی متوالی به وسیلهٔ نیم‌خط قرمز خط جدید از بین می‌رود.

بنابراین، در هر مرحله زوجیت b تغییر می‌کند. چون تعداد خطها نیز از l به $l + 1$ تبدیل می‌شود، در هر مرحله، زوجیت هر دو l و b تغییر می‌کند. بنابراین یا زوجیت l و b در تمام مراحل این فرایند یکسان است و یا در تمام مراحل زوجیتشان مخالف هم است. چون وقتی $l = 2$ ، $b = 1$ ، پس زوجیتشان همیشه مخالف هم است.

بنابراین، در پایان فرایند جایگزینی مجدد، زوجیت عددهای n و b باید مخالف هم باشد. ولی ثابت کردیم که در این مرحله هیچ زوج متوالی از نیم‌خطهای آبی در بادبزین وجود ندارد. بنابراین در شکل موردنظر $b = 0$ ، یعنی b عددی زوج است و در نتیجه n باید زوج باشد.

این بخش را با آوردن سه مسألهٔ مسابقهٔ سال ۱۹۸۵ به پایان می‌بریم.

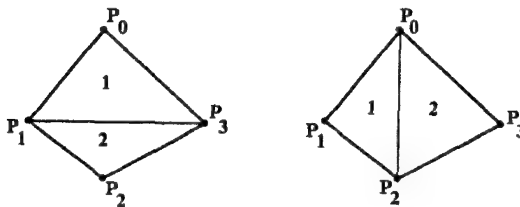
۳. مسألهٔ ۱

(راه حل دیگری برای این مسأله در ۱۹۹۱، ۱۳۴ آمده است.)

$(n + 1)$ ضلعی محدبی مانند $P = P_1 P_2 \dots P_n$ با ترسیم $n - 2$ قطر نامقاطع از آن به $n - 1$ مثلث افراز شده است. ثابت کنید می‌توانیم این مثلثها را با شماره‌های $1, 2, \dots, n - 1$ و n طوری شماره‌گذاری کنیم که P_i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) یکی از رأسهای مثلث i باشد.

راه حل

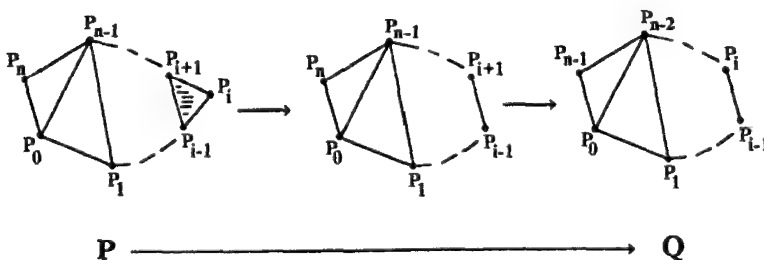
از آنجا که برای مثلث‌بندی چهارضلعی تنها دو روش وجود دارد، با توجه به شکل‌های زیر روشن است که به ازای $n = 3$ می‌توانیم شماره‌گذاری مطلوب را انجام دهیم.



شکل ۵۹

چون طبیعت مسئله می‌طلبد که برای اثبات حکم آن از روش استقرا استفاده کنیم، پس فرض می‌کنیم شماره‌گذاری مطلوب در مورد هر چندضلعی محدب مانند P_0, P_1, \dots, P_{n-1} که در آن $n - 1 \geq 3$ ، امکان‌پذیر باشد و سپس توجه خود را به $(n + 1)$ ضلعی $P = P_0, P_1, \dots, P_n$ معطوف می‌کنیم. به‌طور کلی، به روش‌های بسیاری می‌توانیم چندضلعی را با قطرهای نامتقاطعش مثلث‌بندی کنیم، و باید ثابت کنیم که در هر حالت شماره‌گذاری مطلوب امکان‌پذیر است (در $(n + 1)$ ضلعی، تعداد مثلث‌بندی‌های مختلف برابر است با $(n - 1)$ امین عدد کاتالان، یعنی $(c_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1})$.

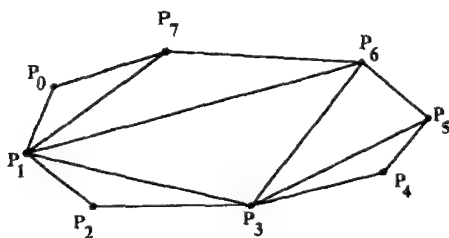
برای استفاده از فرض استقرا، نیازمند روشی هستیم که با آن بتوانیم $(n + 1)$ ضلعی مفروض P را به n ضلعی محدبی مانند Q تبدیل کنیم. یکی از حالت‌های خوب حالتی است که یکی از قطرهای رأسی مانند P_i را از بقیه رأسها جدا کند. در این حالت تبدیل مناسب با حذف کردن مثلث $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ به‌دست می‌آید. در این صورت قطر $P_{i-1}P_{i+1}$ ضلعی از چندضلعی جدید Q است. به‌طور کلی، برای استفاده از فرض استقرا، باید همان‌طور که دورتادور Q را طی می‌کنیم، رأسهای $P_{i+2}, P_{i+1}, \dots, P_n$ و P_0, \dots, P_{i-1} را که پس از P_{i-1} قرار دارند با نامهای $P_i, P_{i+1}, \dots, P_{n-1}$ مجدداً نامگذاری کنیم.



شکل ۶۰

در صورتی که رأس حذف شده یکی از دو رأس P و P_n باشد، باید این فرایند نامگذاری مجدد را اصلاح کنیم. با وجود این، همان‌طور که ثابت خواهیم کرد، همواره می‌توانیم از روی دادن این پیشامدها جلوگیری کنیم، زیرا در هر مثلث‌بندی دستکم یک قطر وجود دارد که رأسی را که P است و نه P_n از بقیه جدا می‌کند.

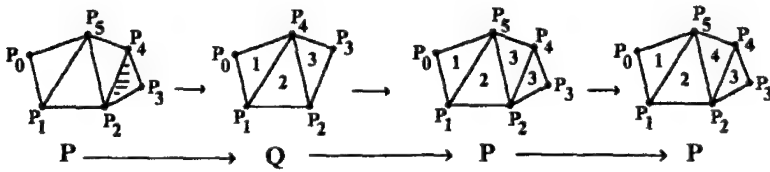
بدیهی است که هر ضلع چندضلعی P به یکی از مثلثهای موجود در مثلث‌بندی تعلق دارد و درحالی که ممکن است هر سه ضلع مثلثی قطره‌های چندضلعی باشند، هیچ مثلثی بیش از دو ضلع P را شامل نمی‌شود (به یاد آورید که $n - 1 \geq 3$ و در نتیجه P مثلث نیست). بنابراین $n + 1$ ضلع P باید بین $n - 1$ مثلث یا کمتر از آن توزیع شود، و در نتیجه دستکم در دو جا باید مثلثی وجود داشته باشد که شامل دو ضلع P است. از آنجا که چنین ضلعهایی در P مجاورند، دستکم دو قطر وجود دارد که هریک از آنها رأسی را از P جدا می‌کند، و چون قطرها نامتقاطع‌اند هیچ دو رأس جدا شده‌ای در P مجاور نیستند. بنابراین دستکم یکی از دو رأس جدا شده یا بیشتر از آن به جفت مجاور (P, P_n) تعلق ندارد. پس نتیجه می‌شود هر مثلث‌بندی را که به کار برده باشیم همواره می‌توانیم $(n + 1)$ ضلعی مفروض P را به n ضلعی محدب $Q = P_0 P_1 \dots P_{n-1}$ تبدیل کنیم که در آن رأسهای P_{i+1}, \dots, P_n که پس از رأس حذف شده P_i قرار دارند و هیچ‌کدام از آنها P یا P_n نیست، به ترتیب به صورت P_i, \dots, P_{n-1} مجدداً نامگذاری شده‌اند.



شکل ۶۱

با استفاده از فرض استقرا فرض می‌کنیم که مثلثهای Q طوری شماره‌گذاری شده‌اند که هریک از رأسهای P_1, P_2, \dots, P_{n-2} به ترتیب رأسی از مثلث $1, 2, \dots, n - 1$ در Q هستند. چون رأس حذف شده، P_i ، نه P است و نه P_n ، i باید یکی از عددهای $1, 2, \dots, n - 1$ باشد. حال فرض کنید که شماره مثلثهای Q را به P منتقل کنیم و به مثلث محذوف $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ ، i را نسبت دهیم. اگر $i = n - 1$ ، آنگاه با تخصیص شماره $n - 1$ به این مثلث بازگردانده شده، شماره‌گذاری مثلثها همان‌طور که می‌خواستیم از 1 تا $n - 1$ کامل شده است. در غیر این صورت $i \leq n - 2$ و در نتیجه با این مشکل روبه‌رو می‌شویم که دو مثلث با شماره i وجود دارد و هیچ مثلثی با شماره $n - 1$ وجود ندارد.

برای رفع این مشکل مثلثهای $i, i+1, \dots, n-2$ در Q را به ترتیب با عددهای $i+1, i+2, \dots, n-1$ مجدداً شماره گذاری می کنیم. در این صورت، Q مستقیماً مثلثهای $1, 2, \dots$ و $i-1$ را شماره گذاری می کند، مثلث حذف شده شماره i خواهد داشت و بقیه مثلثهای Q ، با افزایش واحد به شماره هایشان، مثلثهای $i+1, i+2, \dots, n-1$ را شماره گذاری می کنند. به یاد آورید که هنگام ساختن Q ، به ازای $k \in \{i+1, i+2, \dots, n\}$ ، رأس P_k در P را به صورت P_{k-1} مجدداً نامگذاری کردیم. بنابراین، هرچندکه مثلثها در Q طوری شماره گذاری شده اند که P_{k-1} رأسی از مثلث $k-1$ شود، هنگام انتقال شماره ها به P ، رأس P_k ($k \geq i+1$) به مثلث P_k مربوط می شود. بنابراین، افزایش شماره این مثلثها از $k-1$ به k ، وابستگی P_k به مثلث k را دوباره برقرار می کند.



شکل ۶۲

پس بنا بر استقرا نتیجه می شود که شماره گذاری مطلوب همواره امکان پذیر است.

۴. مسأله ۲

فرض کنید n عددی طبیعی باشد. به ازای هر مقسوم علیه اول n مانند p ، بزرگترین توان p را در نظر بگیرید که از n بیشتر نیست. فرض کنید مجموع همه این بزرگترین توانها را مجموع توانی n بنامیم و آن را با $S(n)$ نشان دهیم. ثابت کنید بی نهایت عدد طبیعی مانند n وجود دارد که از مجموع توانی خود کمترند، به عبارت دیگر، $n < S(n)$.

راه حل

هیچ گاه نمی توان گفت مسأله ای به ظاهر ساده از نظریه اعداد چقدر ممکن است دشوار باشد، و مسأله ای در کورشاک از این نوع همواره دردسری بزرگ است. با وجود این، مسأله حاضر استثنائاً راه حلی سراسر ساده دارد، زیرا به ازای هر عدد طبیعی مانند k ، عدد $n = 2^{k+1} + 2$ در شرط $S(n) > n$ صدق می کند.

چون

$$n = 2^{k+1} + 2 = 2(2^k + 1)$$

n شامل عامل فرد $2^k + 1$ است که دست کم برابر با ۳ است، پس n باید شامل مقسوم علیه اول فردی

مانند q باشد که آن هم دست‌کم برابر با ۳ است. در نتیجه

$$S(2^{k+1} + 2) \geq 2^{k+1} + q^1 \geq 2^{k+1} + 3 > 2^{k+1} + 2$$

و حکم به سادگی نتیجه می‌شود.

تقریباً به همین سادگی می‌توان تحقیق کرد که وقتی $n = 2p$ ، که در آن p عددی اول و فرد است، بازهم شرط $S(n) > n$ برقرار است.

بزرگترین 2^t ای که از عدد زوج n بیشتر نیست همواره از نصف آن عدد بزرگتر است:

اگر غیر از این باشد، یعنی $2^t \leq \frac{n}{2}$ ، آنگاه $2^{t+1} \leq n$ که با فرض ماکسیم بودن 2^t تناقض دارد.

پس به ازای $n = 2p$ ، بزرگترین 2^t ای که از n بیشتر نیست باید از p بزرگتر باشد:

$$2^t > p$$

چون p عددی اول و فرد است، پس $2p = p^2 < 2p$ و در نتیجه بزرگترین توان p که از n بیشتر نیست خود p است. در نتیجه

$$S(n) = S(2p) = 2^t + p > p + p = 2p = n$$

که همان نتیجه مطلوب است.

تذکرات

بدیهی است که وقتی $n = p$ ، که در آن p عددی اول است، نتیجه می‌شود $S(n) = n$ و در نتیجه بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد که در برابری $S(n) = n$ صدق می‌کنند. به نظر می‌رسد که اثبات وجود بی‌نهایت جواب برای نابرابری $S(n) < n$ کوشش بیشتری می‌طلبد و آنچه در زیر آمده است گواهی بر این ادعاست.

بنابر اصل برتان، به ازای هر عدد طبیعی مانند n ، $n \geq 2$ ، عدد اولی بین n و $2n$ وجود دارد. فرض کنید p عددی اول و فرد و q عددی اول بین p و $2p$ باشد. همان‌طور که ثابت خواهیم کرد، نتیجه می‌شود که $S(pq) < pq$.

از نابرابریهای $2p < q < p$ نتیجه می‌گیریم $p^2 < 2p^2 < pq < p^2$ ، زیرا $3 \leq p$ ، و در نتیجه معلوم می‌شود که 2^t بزرگترین توان p است که از pq بیشتر نیست. همچنین، از نابرابریهای $q^2 < pq < qq = q^2$ نتیجه می‌شود بزرگترین توان q که از n بیشتر نیست خود q است. بنابراین

$$S(pq) = p^2 + q$$

حال q هم عددی اول و فرد، و در نتیجه تفاضل $q - p$ دست‌کم برابر با ۲ است. بنابراین $q - p \geq 2$ ، و در نتیجه

$$p(q - p) \geq 2p > q$$

$$pq - p^2 > q, \quad -pq + p^2 < -q, \quad p^2 + q < pq$$

یعنی $S(pq) < pq$ و این همان نتیجه مطلوب است.

۵. مسأله ۳

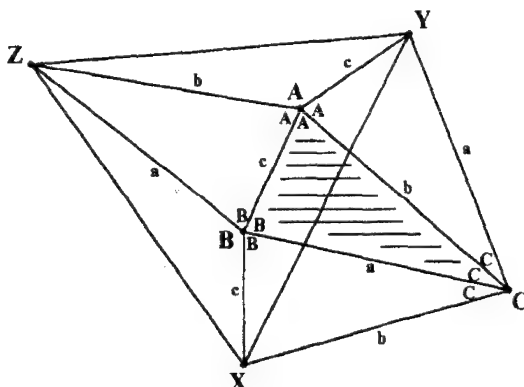
(راه‌حل دیگری برای این مسأله در ۱۹۹۰، ۶ آمده است.)

فرض کنید که هر رأس مثلث ABC نسبت به ضلع مقابلش بازتابیده شده و سه نقطه Y, X, Z حاصل شده است. ثابت کنید مساحت مثلث XYZ هیچ‌گاه بیش از پنج برابر مساحت مثلث اصلی، ABC ، نمی‌شود.

راه‌حل

فرض کنید مساحت مثلث ABC را با Δ نشان دهیم. از آنجا که بازتابها نسخه‌های YAC, XBC و ZAB از مثلث ABC را پدید می‌آورند، این مثلثها نیز مساحت‌هایی برابر با Δ دارند. حال می‌توان مساحت مثلث XYZ را برحسب مساحت این نسخه‌های مثلث ABC و مساحت سه مثلث «بیرونی» AYZ, BZX و CXY به صورت زیر نوشت (شکل ۶۳):

$$\begin{aligned} \text{مساحت } \Delta XYZ &= \text{مساحت } \Delta ABC + \text{مساحت } \Delta YAC + \text{مساحت } \Delta ZAB \\ &\quad \pm \text{مساحت } \Delta AYZ \pm \text{مساحت } \Delta BZX \pm \text{مساحت } \Delta CXY \\ &= 4\Delta \pm \text{مساحت } \Delta AYZ \pm \text{مساحت } \Delta BZX \pm \text{مساحت } \Delta CXY \end{aligned}$$



شکل ۶۳

که در آن، هریک از سه مساحت آخر، بسته به شکل مثلث ABC ، ممکن است افزوده یا کاسته شود. درحالی‌که در شکل ۶۳ نشان داده شده است، باید دو مساحت اول افزوده و مساحت سوم کاسته شود. از آنجا که هر زاویه‌ای از مثلث ABC مانند θ سه بار در رأسی به همین نام ظاهر می‌شود، با توجه به شکل ۶۳ معلوم می‌شود که وقتی $180^\circ < 3\theta$ ، مساحت مثلث مجاور بیرونی باید کاسته شود (در این حالت این مثلث باید بیرون $\triangle XYZ$ قرار گیرد)، وقتی که $180^\circ > 3\theta$ ، این مساحت باید افزوده شود (که در این حالت این مثلث درون $\triangle XYZ$ قرار می‌گیرد) و وقتی که $180^\circ = 3\theta$ ، این مثلث از بین می‌رود و مساحتش برابر با صفر می‌شود. با یادآوری دستور $\frac{1}{4}pq \sin R$ برای مساحت $\triangle PQR$ و اینکه $\sin(360^\circ - 3\theta) = -\sin 3\theta$ در حالتی که در شکل نشان داده شده است، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \text{مساحت } \triangle CXY - \text{مساحت } \triangle BZX + \text{مساحت } \triangle AYZ + \text{مساحت } \triangle XYZ &= 4\Delta \\ &= 4\Delta + \frac{1}{4}bc \sin(360^\circ - 3A) + \frac{1}{4}ac \sin(360^\circ - 3B) - \frac{1}{4}ab \sin 3C \\ &= 4\Delta - \frac{1}{4}bc \sin 3A - \frac{1}{4}ac \sin 3B - \frac{1}{4}ab \sin 3C \end{aligned}$$

درحقیقت این عبارت مساحت درست $\triangle XYZ$ را در تمام حالتها به دست می‌دهد:

وقتی $180^\circ > 3\theta$ ، که در این حالت باید مساحت مثلث بیرونی افزوده شود، مقدار $\sin 3\theta$ منفی و در نتیجه $-\sin 3\theta$ مثبت است؛

و

وقتی $180^\circ < 3\theta$ ، با توجه به اینکه باید مساحت مثلث بیرونی کاسته شود، مقدار $-\sin 3\theta$ منفی است.

بنابراین، برای اینکه ثابت کنیم مساحت مثلث XYZ هیچ‌گاه از 5Δ بیشتر نمی‌شود، باید نابرابری

$$-\frac{1}{4}bc \sin 3A - \frac{1}{4}ac \sin 3B - \frac{1}{4}ab \sin 3C < \Delta$$

یا یکی از صورتهای معادلش در زیر را ثابت کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}bc \sin 3A + \frac{1}{4}ac \sin 3B + \frac{1}{4}ab \sin 3C &> -\Delta \\ \frac{1}{4}bc(3 \sin A - 4 \sin^2 A) + \frac{1}{4}ac(3 \sin B - 4 \sin^2 B) \\ &+ \frac{1}{4}ab(3 \sin C - 4 \sin^2 C) > -\Delta \end{aligned}$$

$$3\Delta - 4\Delta \sin^2 A + 3\Delta - 4\Delta \sin^2 B + 3\Delta - 4\Delta \sin^2 C > -\Delta$$

$$10\Delta > 4\Delta(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

$$\frac{5}{2} > \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$$

که خود مسأله‌ای جالب توجه است.

به عنوان نخستین گام در اثبات آخرین نابرابری ثابت می‌کنیم

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$$

روشن است که

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= 1 - \cos^2 A + 1 - \cos^2 B + \sin^2 C \\ &= 2 + (\sin^2 C - \cos^2 A - \cos^2 B) \end{aligned}$$

بنابراین، برای اثبات نخستین گام باید ثابت کنیم

$$2 \cos A \cos B \cos C = \sin^2 C - \cos^2 A - \cos^2 B$$

با توجه به اینکه

$$2 \cos \theta \cos \phi = \cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi), \quad A + B + C = 180^\circ$$

نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} 2 \cos A \cos B \cos C &= [\cos(A + B) + \cos(A - B)] \cos C \\ &= \cos(180^\circ - C) \cos C + \cos(A - B) \cos C \\ &= -\cos^2 C + \cos(A - B) \cos[180^\circ - (A + B)] \\ &= -\cos^2 C - \cos(A - B) \cos(A + B) \\ &= -\cos^2 C - \frac{1}{4} [2 \cos(A + B) \cos(A - B)] \\ &= -\cos^2 C - \frac{1}{4} (\cos 2A + \cos 2B) \\ &= -\cos^2 C - \frac{1}{4} (2 \cos^2 A - 1 + 2 \cos^2 B - 1) \\ &= -\cos^2 C - \cos^2 A - \cos^2 B + 1 \\ &= (1 - \cos^2 C) - \cos^2 A - \cos^2 B \\ &= \sin^2 C - \cos^2 A - \cos^2 B \end{aligned}$$

که همان نتیجه مطلوب است.

برای اینکه کار را تمام کنیم باید ثابت کنیم

$$2 + 2 \cos A \cos B \cos C < \frac{5}{4}$$

به عبارت دیگر

$$2 \cos A \cos B \cos C < \frac{1}{4}$$

همان‌طور که در بالا گفتیم

$$2 \cos A \cos B \cos C = [\cos(A + B) + \cos(A - B)] \cos C$$

حال، A ، B و C زاویه‌های مثبتی هستند که مجموعشان برابر با 180° است. فرض کنید دو تا از آنها، مثلاً A و B ، نابرابر باشند. در این صورت، این مقادیر A ، B و C ، بیشترین مقدار ممکن

$$[\cos(A + B) + \cos(A - B)] \cos C$$

را به دست نمی‌دهند، زیرا به ازای مجموعه مقادیر (A', B', C') که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$A' = B' = \frac{A+B}{2}, \quad C' = C$$

مقدار $\cos(A' + B')$ و $\cos C'$ به ترتیب با مقادیر $\cos(A + B)$ و $\cos C$ برابرند ولی مقدار جمله باقی‌مانده به $\cos(A - B) = \cos 0 = 1$ افزایش می‌یابد (در عبارت موردنظر مقدار $\cos(A - B)$ کمتر از ۱ است زیرا A و B نابرابرند). به همین ترتیب، از مقارن بودن عبارت $2 \cos A \cos B \cos C$ نتیجه می‌شود که در صورت نابرابر بودن دو مقدار از مقادیر A ، B و C مقدار ماکسیمم این عبارت به دست نمی‌آید. چون بنابر پیوستگی این تابع اطمینان داریم که روی بازه $0 < A, B, C < 180^\circ$ مقدار ماکسیممی را اتخاذ می‌کند، نتیجه می‌گیریم که

$$\max(2 \cos A \cos B \cos C) = 2 \cos 60^\circ \cos 60^\circ \cos 60^\circ = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

که خیلی پایتتر از سقف مطرح شده، یعنی $\frac{1}{2}$ ، قرار دارد و این نتیجه برهان را کامل می‌کند.

دو مسأله از مسابقه ملی ریاضیات دوره راهنمایی جمهوری خلق چین، ۱۹۸۶

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۱۳۰)

پرسشهایی در سطح دوره راهنمایی عموماً چندان برای ما جالب توجه نیستند، ولی دو مسأله زیر، به ویژه مسأله اول، آنقدر جذاباند که نمی توانم از ذکر آنها صرف نظر کنم.

مسأله ۱

طول ضلعهای AB ، BC ، CD و DA از چهارضلعی $ABCD$ به ترتیب برابرند با ۱، ۹، ۸ و ۶. کدام یک از پاسخهای زیر پنج گزاره زیر را به درستی توصیف می کند؟

(یک) چهارضلعی $ABCD$ را می توان بر دایره ای محیط کرد؛

(دو) چهارضلعی $ABCD$ را نمی توان در دایره ای محاط کرد؛

(سه) راستای قطرهای AC و BD بر هم عمود نیستند؛

(چهار) $\angle ADC \geq 90^\circ$ ؛

(پنج) $\triangle BCD$ متساوی الساقین است.

الف: (یک) درست است، (دو) نادرست است، (چهار) درست است

ب: (سه) درست است، (چهار) نادرست است، (پنج) درست است

ج: (سه) درست است، (چهار) نادرست است، (پنج) نادرست است

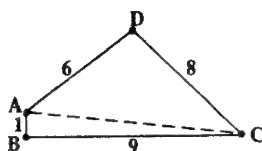
د: (دو) نادرست است، (سه) نادرست است، (چهار) درست است

راه حل

اگر گزاره ها و پاسخها را در جدولی جمع آوری کنیم، برای درک وضعیت موجود بسیار مفید است.

از جدول معلوم می شود که گزاره (چهار) بیش از بقیه در پاسخها ظاهر می شود. بنابراین، کار خود را با بررسی گزاره (چهار)، یعنی اینکه $\angle ADC \geq 90^\circ$ ، آغاز می کنیم. در صورتی که $\angle ADC = 90^\circ$ ،

	(پنج) (چهار) (سه) (دو) (یک)			
الف	د	ن		د
ب			د	ن
ج			د	ن
د		ن	ن	د



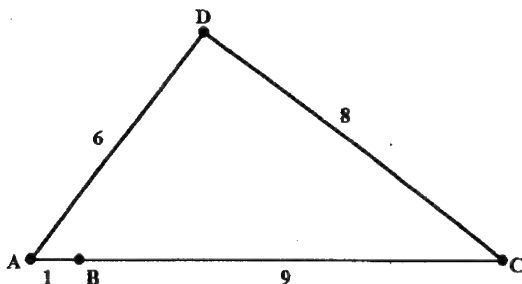
شکل ۶۴

$\triangle ADC$ مثلثی قائم‌الزاویه با طول ضلعهای $10-8-6$ خواهد بود و طول وترش، AC ، 10° است.

حال، قطعاً AC بزرگتر از 10° نیست، زیرا از نابرابری مثلثی نتیجه می‌شود

$$AC \leq AB + BC = 1 + 9$$

بنابراین، اینکه $\angle ADC > 90^\circ$ ناممکن است و اگر (چهار) برقرار باشد، $\angle ADC$ دقیقاً برابر با 90° و در نتیجه $\angle ABC$ نیمصفحه و نیز چهارضلعی $ABCD$ به مثلثی تبدیل می‌شود که B روی ضلع AC از آن واقع است (شکل ۶۵ را ببینید).



شکل ۶۵

در نتیجه، دایره‌ای که از نقاط A ، C و D می‌گذرد از B نمی‌گذرد و بنابراین گزاره (دو) که می‌گویید چهارضلعی $ABCD$ محاطی نیست درست است. به عبارت دیگر، گزاره (چهار) گزاره (دو) را نتیجه می‌دهد و بنابراین (الف) و (د) درست نیستند. بین دو پاسخ باقی‌مانده یکی مدعی است که (پنج) درست است و دیگری مدعی است که (پنج) نادرست است. از آنجا که تنها تفاوت این دو پاسخ در همین مطلب است، بیایید ببینیم که آیا گزاره (پنج) در انتخاب یکی از این دو پاسخ به ما کمکی می‌کند. گزاره (پنج) این است که $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است. ولی

$$BD \leq BA + AD = 1 + 6 = 7$$

و در نتیجه، با توجه به اینکه طول ضلعهای دیگر مثلث برابر با 8 و 9 است، بدیهی است که تحت هر شرطی (پنج) نادرست است. بنابراین پاسخ درست (ج) است.

مسألة ۲

فرض کنید n عددی طبیعی باشد و

$$I_n = (n+1)^2 + n - \left[\sqrt{(n+1)^2 + n+1} \right]^2$$

که در آن [] نشانه تابع جزء صحیح است. در این صورت

الف) به ازای هر n ، $I_n > 0$.

ب) به ازای هر n ، $I_n < 0$.

ج) به ازای هر n ، $I_n = 0$.

د) I_n هم مقادیری مثبت را اختیار می‌کند هم مقادیری منفی و هم صفر.

راه حل

با نگاهی به چند مقدار اولیه I_n ها معلوم می‌شود

$$I_1 = 4 + 1 - [\sqrt{6}]^2 = 5 - 4 = 1$$

$$I_2 = 9 + 2 - [\sqrt{12}]^2 = 11 - 9 = 2$$

$$I_3 = 16 + 3 - [\sqrt{20}]^2 = 19 - 16 = 3$$

از این برابریها چنین به نظر می‌رسد که ثابت کنیم

$$I_n = n$$

بدیهی است که

$$(n+1)^2 < (n+1)(n+2) < (n+2)^2$$

و در نتیجه

$$n+1 < \sqrt{(n+1)(n+2)} < n+2$$

و بنابراین

$$[\sqrt{(n+1)(n+2)}] = n+1$$

یعنی

$$[\sqrt{(n+1)[(n+1)+1]}] = [\sqrt{(n+1)^2 + n+1}] = n+1$$

بنابراین

$$\left[\sqrt{(n+1)^2 + n+1} \right]^2 = (n+1)^2$$

و در نتیجه

$$I_n = (n+1)^2 + n - (n+1)^2 = n$$

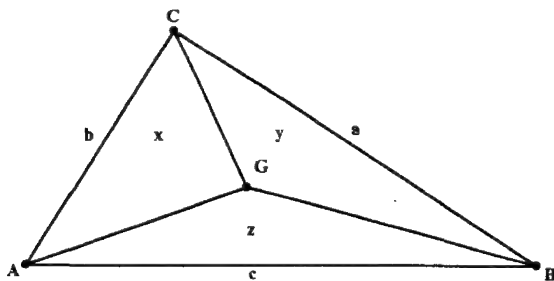
که همان نتیجه مطلوب است.

پس پاسخ درست (الف) است: به ازای هر n ، $I_n > 0$.

مسأله‌ای از المپیاد اسپانیا، ۱۹۸۶

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۶۸)

فرض کنید طول ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه ABC عددهایی صحیح باشند. فرض کنید پاره خطهایی که مرکز ثقل مثلث، G ، را به رأسها وصل می‌کنند، مثلث را به سه مثلث کوچکتر به مساحت‌های x ، y و z تقسیم کنند. ثابت کنید که هریک از عددهای x ، y و z عددی صحیح و زوج است.



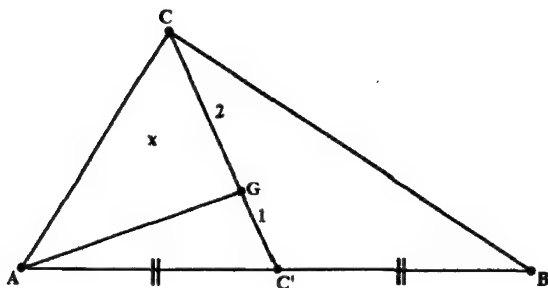
شکل ۶۶

راه حل

(راه حل مشابهی در کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۹۰، ۱۷ آمده است.) نخستین چیزی که باید به آن توجه کنیم این است که مساحت همهٔ این مثلثهای کوچک برابر با $\frac{1}{3}\Delta ABC$ است. برای مثال میانهٔ CC' ، ΔABC را نصف می‌کند و چون مرکز ثقل هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، پس

$$x = \frac{2}{3}\Delta CAC' = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\Delta ABC = \frac{1}{3}\Delta ABC$$

به همین ترتیب در مورد y و z . بنابراین کافی است فقط ثابت کنیم x عددی صحیح و زوج است. اینک بنابر حکمی نسبتاً معروف (که از نظر من همهٔ شرکت‌کنندگان در المپیادها آن را به خوبی می‌دانند) عددهای درست a ، b و c ، از سه تایی فیثاغورسی، را می‌توان برحسب سه عدد طبیعی مانند



شکل ۶۷

k, m و n به صورت زیر نوشت:

$$a = 2kmn, \quad b = k(m^2 - n^2), \quad c = k(m^2 + n^2)$$

در این صورت با یادآوری اینکه $\angle C$ قائمه است معلوم می شود

$$x = \frac{1}{3} \Delta ABC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} ab = \frac{k^2 mn(m^2 - n^2)}{3}$$

حال می خواهیم ثابت کنیم که ۳ نه تنها صورت کسر، یعنی N ، را می شمارد، بلکه ۲ نیز آن را می شمارد و در نتیجه صورت کسر عددی زوج است. ولی این کار را می توانیم به آسانی انجام دهیم.

یک) اگر m یا n بر ۳ بخش پذیر باشد، N هم بر ۳ بخش پذیر است. در غیر این صورت می توان نوشت (به پیمانه ۳) $m, n \equiv \pm 1$ و در نتیجه (به پیمانه ۳) $m^2, n^2 \equiv 1$ و در نتیجه (به پیمانه ۳) $m^2 - n^2 \equiv 0$ ، یعنی N مطمئناً بر ۳ بخش پذیر است.

دو) اگر m یا n بر ۲ بخش پذیر باشد، N نیز بر ۲ بخش پذیر است. در غیر این صورت m و n هر دو فردند و در نتیجه $m^2 - n^2$ زوج و برهان کامل شده است.

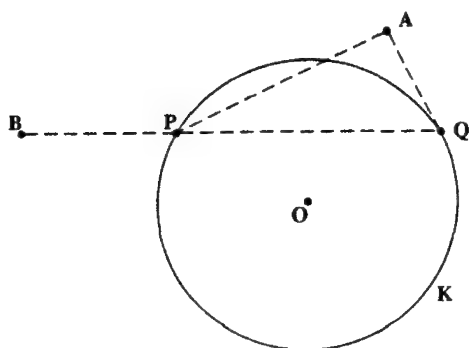
ترسیمی هندسی

(مسأله ۱۱۸۸، کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۳۲)

این مسأله مربوط به ترسیم هندسی زیبایی است که اگر اندکی به آن فکر کنید معلوم می شود راه حل بسیار ساده و سراسری دارد.

در صفحه دایره مفروض K ، به مرکز O و شعاع r ، نقاط A و B مشخص شده اند. وتری مانند PQ از K طوری رسم کنید که از B بگذرد و روبه رو به زاویه قائمه ای در رأس A باشد.

این مسأله از دُن سوکولوفسکی از شهر ویلیامزبورگ در ایالت ویرجینیا و راه حل آن از جورج تسینتسیفاس از شهر تسالونیک در کشور یونان است.



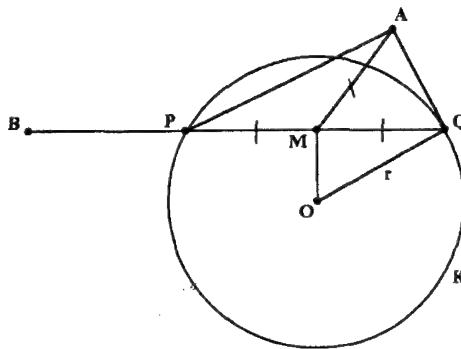
شکل ۶۸

راه حل

روشن است که اگر بتوانیم نقطه ناآشنایی مانند M روی وتر مطلوب پیدا کنیم، خطی که شامل پاره خط BM است مسأله را حل می کند. پرسش این است که جای کدام نقطه روی PQ ارزش مشخص شدن را دارد؟ البته روی هر وتری از دایره یکی از نقاط خاص، M ، یعنی وسط آن وتر است، زیرا پاره خط

MO بر وتر عمود است. با دانستن این مطلب و با توجه به این مطلب که در هر مثلث قائم‌الزاویه وسط وتر از سه رأس مثلث به یک فاصله است، به نظر می‌رسد که در این مورد این انتخاب بسیار خوب است. بنابراین به نظر می‌رسد که تلاش برای یافتن دو مکان هندسی که در نقطه M ، وسط PQ ، یکدیگر را قطع می‌کنند ارزش دارد.

چون زاویه BMO قائمه است، دایره به قطر BO از M می‌گذرد. امیدواریم که رابطه‌های ساده دیگری که در شکل وجود دارند مکان هندسی دیگری را مشخص کنند که از M می‌گذرد.



شکل ۶۹

در مثلث قائم‌الزاویه OMQ از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود

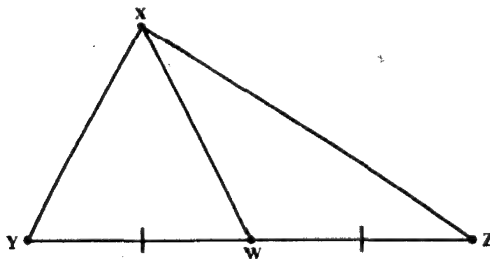
$$r^2 = OM^2 + MQ^2$$

و چون $MQ = MA$ ، پس

$$r^2 = OM^2 + MA^2$$

در نهایت شگفتی، اکنون به رابطه مهمی رسیدیم، زیرا تنها چیزی که باقی مانده استفاده از این قضیه معروف است که «مجموع مربعات طول دو ضلع مثلث برابر است با دو برابر طول میانه وارد بر ضلع سوم به علاوه نصف مربع ضلع سوم»؛ یعنی با توجه به شکل ۷۰،

$$XY^2 + XZ^2 = 2XW^2 + \frac{1}{2}YZ^2$$



شکل ۷۰

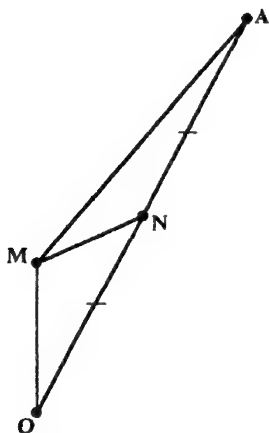
(این قضیه نتیجه فوری استفاده از قانون کسینوسها در مثلثهای XYW و XWZ است.)
 بنابراین اگر در مثلث OMA ، MN میانه وارد بر OA باشد (شکل ۷۱ را ببینید)، آنگاه

$$r^2 = OM^2 + MA^2 = 2MN^2 + \frac{1}{4}OA^2$$

از این رابطه می‌توانیم MN را بر حسب r و OA به دست آوریم:

$$MN = \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{4}OA^2}$$

بنابراین دایره به مرکز N و شعاع MN دومین مکان هندسی است که از M می‌گذرد و راه حل مسأله تمام شده است.



شکل ۷۱

نابرابری شامل لگاریتم

(مسأله ۱۱۲۷، کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۰۲)

(قسمت (الف) از مسأله طرح شده از سوی د. س. میتروویچ، دانشگاه بلگراد، یوگسلاوی؛ راه حل از ماری کلامکین، دانشگاه آلبرتا، کانادا)

اگر a, b و c عددهایی حقیقی و بزرگتر از ۱ باشند، به ازای هر r ، $r > 0$ ، ثابت کنید

$$S = (\log_a bc)^r + (\log_b ca)^r + (\log_c ab)^r \geq 3 \times 2^r$$

راه حل

پیش از هر چیز توجه کنید که $\log_x y = \frac{\ln y}{\ln x}$ (اگر فرض کنیم $\log_x y = k$ ، آنگاه $y = x^k = e^{k \ln x}$ و در نتیجه $\ln y = k \ln x$). بنابراین

$$\log_a bc = \frac{\ln bc}{\ln a} = \frac{\ln b + \ln c}{\ln a} = \frac{\ln b}{\ln a} + \frac{\ln c}{\ln a}$$

اینک بنابر نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی،

$$\frac{\ln b}{\ln a} + \frac{\ln c}{\ln a} \geq 2 \left[\frac{\ln b \cdot \ln c}{(\ln a)^2} \right]^{1/2}$$

و در نتیجه

$$\log_a bc \geq \frac{2(\ln b \cdot \ln c)^{1/2}}{\ln a}$$

که از آن نتیجه می شود

$$(\log_a bc)^r \geq \frac{2^r (\ln b \cdot \ln c)^{r/2}}{(\ln a)^r}$$

به همین ترتیب

$$(\log_b ca)^r \geq \frac{2^r (\ln c \cdot \ln a)^{r/2}}{(\ln b)^r}, \quad (\log_c ab)^r \geq \frac{2^r (\ln a \cdot \ln b)^{r/2}}{(\ln c)^r}$$

بنابراین

$$S \geq \frac{2^r (\ln b \cdot \ln c)^{r/2}}{(\ln a)^r} + \frac{2^r (\ln c \cdot \ln a)^{r/2}}{(\ln b)^r} + \frac{2^r (\ln a \cdot \ln b)^{r/2}}{(\ln c)^r}$$

بالاخره با استفاده از نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی در طرف راست به دست می آوریم

$$\frac{S}{3} \geq \left[\frac{2^r (\ln b \cdot \ln c)^{r/2}}{(\ln a)^r} \cdot \frac{2^r (\ln c \cdot \ln a)^{r/2}}{(\ln b)^r} \cdot \frac{2^r (\ln a \cdot \ln b)^{r/2}}{(\ln c)^r} \right]^{1/3}$$

و در نتیجه

$$S \geq 3 \left[\frac{2^{3r} (\ln a \cdot \ln b \cdot \ln c)^r}{(\ln a \cdot \ln b \cdot \ln c)^r} \right]^{1/3}$$

یعنی

$$S \geq 3 \times 2^r$$

که همان نابرابری مطلوب است.

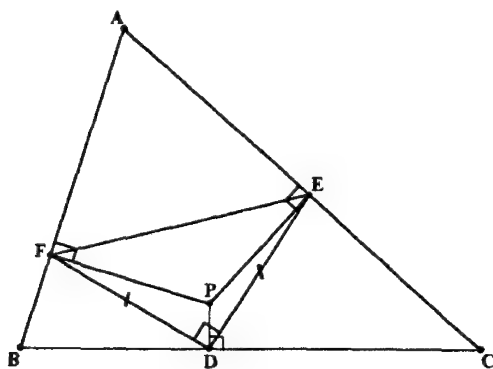
این برهان را می توان در مورد n عدد که همگی از ۱ بزرگترند تعمیم داد:

$$S = \sum_{i=1}^n (\log_{a_i} a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n)^r \geq n(n-1)^r$$

مسأله‌ای دربارهٔ مثلثهای پایی قائم الزاویهٔ متساوی الساقین

(مسألهٔ ۱۲۳۹، کروش ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۱۲۰)

اگر از نقطهٔ P عمودهایی بر ضلعهای مثلث ABC رسم کنیم، مثلث حاصل از پای عمودها، E, D و F ، مثلث پای P نسبت به $\triangle ABC$ نامیده می‌شود. نقطهٔ P را می‌توان درون یا بیرون $\triangle ABC$ یا حتی روی ضلعی از آن انتخاب کرد. در مسألهٔ ۱۲۳۹، ج. ت. گرونمان (از شهر آرنهم در هلند) مسألهٔ فریبندهٔ زیر را دربارهٔ مثلثهای پایی مطرح کرده است.



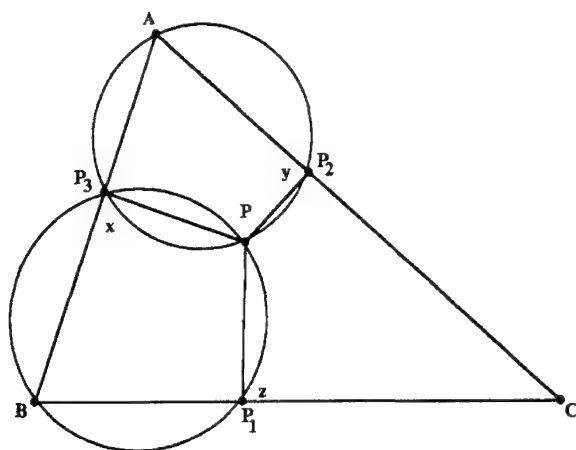
شکل ۷۲

مثلث ABC مفروض است، نقطهٔ P را کجا انتخاب کنیم تا مثلث پای P قائم الزاویهٔ متساوی الساقین باشد؟

راه حل

نمی‌خواهیم این مسأله را کامل حل کنیم و فقط نقطه‌هایی را در نظر می‌گیریم که درون مثلث اند. عمودهای PD ، PE و PF مثلث را به سه چهارضلعی تقسیم می‌کنند که هرکدام از آنها

به‌وضوح محاطی است. در نتیجه شکل ما مثال خوبی از چیزی به نام پیکربندی «میکل» است. قضیهٔ میکل این نتیجهٔ مهم است که اگر p_1 و p_2 سه نقطهٔ دلخواه به‌ترتیب روی ضلعهای BC ، AC و AB از $\triangle ABC$ باشند، آنگاه دایره‌های AP_1P_2 ، BP_1P_3 و CP_2P_3 متقارب‌اند.



شکل ۷۳

برهان این قضیه بسیار ساده است: با توجه به شکل ۷۳، اگر P نقطهٔ برخورد دایره‌هایی باشد که از A و B می‌گذرند، آنگاه از محاطی بودن چهارضلعیها نتیجه می‌شود $x = z$ و $x = y$ و در نتیجه $y = z$. بنابراین چهارضلعی PP_1CP_2 نیز محاطی است. P را نقطهٔ میکل $\triangle P_1P_2P_3$ و $\triangle P_1P_2P_3$ را مثلث میکل P می‌نامند.

هر نقطه مانند P نقطهٔ میکل خانواده‌ای نامتناهی از مثلثهای میکل است. P را که انتخاب کنیم، با توجه به شکل روشن است که فقط لازم است خطهای شعاعی PP_1 ، PP_2 و PP_3 ضلعهای نظیرشان را تحت یک زاویه قطع کنند. در صورتی که این زاویه‌ها قائمه باشند، مثلث میکل حاصل همان مثلث پایی است.

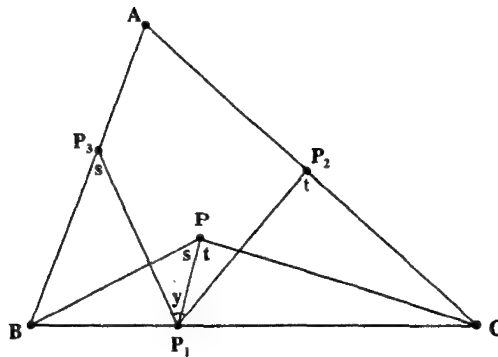
پیکربندی میکل همواره این ویژگی جالب توجه را دارد که

$$\angle BPC = \angle P_2P_1P_2 + A$$

به عبارت دیگر، با توجه به شکل ۷۴،

$$s + t = y + A$$

این نتیجه برهان بسیار ساده و سراسری دارد که با امید به اینکه روش زیر نیز جالب توجه باشد از آن صرف‌نظر می‌کنم.



شکل ۷۴

در چهارضلعیهای محاطی به‌وضوح

$$\angle BP_1P_3 = s, \quad \angle P_1P_2C = t$$

اینک فرض کنید AB به‌اندازه زاویه s حول P_3 بچرخد تا روی P_3P_1 قرار بگیرد. سپس آن را به‌اندازه زاویه y حول P_1 می‌چرخانیم تا بر P_1P_2 قرار بگیرد و در آخر آن را حول P_2 به‌اندازه زاویه t می‌چرخانیم تا روی AC واقع شود. نتیجه نهایی این کارها این است که خط چرخان را از AB تا AC یعنی به‌اندازه زاویه‌ای برابر با A حرکت داده‌ایم. در نتیجه $s - y + t = A$ و یا

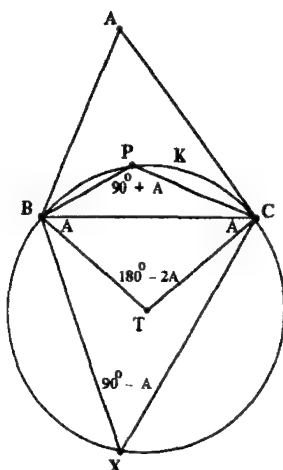
$$s + t = y + A$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

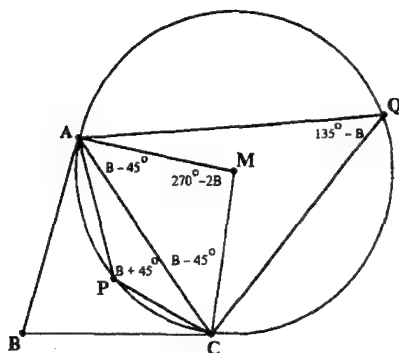
بنابراین اگر بخواهیم رأس قائمه مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین پایی روی ضلع BC باشد، باید زاویه y قائمه باشد. در نتیجه زاویه BPC باید برابر با $90^\circ + A$ باشد. به عبارت دیگر P باید جایی روی کمان K از دایره‌ای قرار گیرد که در آن BC وتر مقابل به کمان درخور زاویه $90^\circ + A$ است. ولی می‌توانیم این دایره را به‌آسانی رسم کنیم. برای یافتن مرکز این دایره، کافی است در نقاط B و C زاویه‌هایی برابر با A رسم کنیم (شکل ۷۵ الف) را ببینید).

برای اینکه مثلث DEF متساوی‌الساقین هم باشد، زاویه‌های دیگرش باید برابر با 45° باشند، و در نتیجه همانند قبل P باید روی کمان L از دایره‌ای واقع شود که در آن AC وتر مقابل به کمان درخور زاویه $45^\circ + B$ است (در این حالت از ویژگی زاویه میکل نتیجه می‌شود $\angle CPA = z + B$). این دایره نیز به‌آسانی رسم می‌شود (شکل‌های ۷۵ ب) و ج) را ببینید).

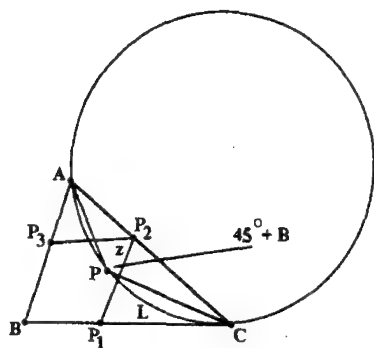
بنابراین تعیین P ، محل برخورد کمانهای K و L ، کار بسیار ساده‌ای است و روشن است که P تنها نقطه‌ای درون $\triangle ABC$ است که مثلث پایی آن، DEF ، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است و رأس قائمه‌اش در نقطه D روی BC قرار دارد، یعنی EF وتر آن است. با توجه به وجود دو وضعیت



شکل ۷۵ (الف)



شکل ۷۵ (ج)



شکل ۷۵ (ب)

دیگر P متناظر با وترهای DE و DF ، تنها سه نقطه مانند P درون $\triangle ABC$ وجود دارند که جواب مسأله‌اند.

اینجا انتهای جایی است که می‌توانیم موضوع را دنبال کنیم، به استثنای اینکه خاطر نشان کنیم که سه نقطهٔ دیگر مانند P نیز بیرون $\triangle ABC$ وجود دارند و این شش نقطه به ترتیب زیر جفت‌جفت‌اند.

اگر P نقطه‌ای درون مثلث باشد که رأس قائمهٔ مثلث پایی نظیرش در D روی BC است، می‌توانیم نقطهٔ نظیر آن، P' را که بیرون $\triangle ABC$ است و رأس قائمهٔ مثلث پایی نظیر آن نیز روی BC قرار دارد، با امتداد کمان K (که در بالا راجع به آن صحبت کردیم) و کامل کردن دایرهٔ مربوط به آن و توجه به نقاط برخورد آن با خط OP که P را به O ، مرکز دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ ، وصل می‌کند بیابیم

دو مسأله از المپیاد اتریش، ۱۹۸۷

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۳۴ - ۳۵)

مسأله ۱

با حل کردن معادله

$$x^2 + x - 2 = 0$$

به آسانی به دست می آید

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

یعنی ریشه‌ها ۱ و ۲- هستند. در این صورت بدیهی است که $x^2 + x - 2$ چندجمله‌ای تکین با ضریبهای صحیح است و این ویژگی جالب توجه را دارد که ریشه‌های معادله نظیرش چیزی جز ضریبهای نهایی آن نیستند.

مثالی دیگر این است

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2(x + 1) - (x + 1) = 0$$

$$(x^2 - 1)(x + 1) = 0$$

که ریشه‌های ۱، ۱- و ۱- هستند.

در این مسأله از ما خواسته شده است که همه این نوع چندجمله‌ایها را بیابیم:

همه چندجمله‌ایهای تکین با ضریبهای صحیح مانند

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

را بیابید به طوری که n ریشه $P_n(x) = 0$ ضریبهای خودش یعنی a_1, a_2, \dots, a_n باشند.

راه حل

این مسأله یکی از سه مسأله‌ای بود که شرکت‌کنندگان در این المپیاد برای حل کردن آنها $\frac{1}{4}$ ساعت وقت در اختیار داشتند. اگرچه شنیدن اینکه بسیاری از شرکت‌کنندگان هر سه مسأله را حل کرده‌اند مرا متعجب

نکرد، ولی باید بگویم که یافتن راه حل این مسأله برای من بسیار بیشتر از مدت تمام امتحان طول کشید. ممکن است برخی از ضریبها برابر با صفر باشند. اگر تعداد کل صفرها در میان a_i ها برابر با $n-k$ باشد، آنگاه معادله $P_n(x) = 0$ دقیقاً $n-k$ تا ریشه برابر صفر دارد و این موجب می شود که x^{n-k} عامل مشترک جمله های $P_n(x)$ باشد:

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_k x^{n-k} = x^{n-k} (x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k)$$

$n-k$ جمله آخر $P_n(x)$ عبارت اند از $x^{n-k-1}, x^{n-k-2}, \dots, 0$ و 0 که $n-k$ ضریب صفر نظیر ریشه های صفر چندجمله ای اند. از آنجا که این ضریبهای حذف شده کل ضریبهای صفرند، بقیه ضریبها، یعنی a_1, a_2, \dots, a_k باید ناصفر باشند. به عبارت دیگر $P_n(x)$ از حاصل ضرب توانی از x در چندجمله ایی که همه ضریبهایش ناصفرند تشکیل شده است. قسمت اصلی $P_n(x)$ چندجمله ای

$$P_k(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

است که در آن a_i ها ناصفرند، زیرا اگر ریشه های چندجمله ایی از این نوع برابر با ضریبهایش، a_i ها، باشد، همین مطلب درباره چندجمله ای

$$x^t (x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k), \quad t = 0, 1, \dots$$

درست است. اگرچه عامل x^t ، ریشه صفر جدید به ریشه های قبلی اضافه می کند، ولی در عین حال t ضریب صفر جدید نیز به آخر چندجمله ای می افزاید. چون به ازای هر n چندجمله ای x^n قابل قبول است، روشن است که مسأله به تعیین همه چندجمله ایهایی به شکل $P_k(x)$ منجر می شود. کار را با ذکر این مطلب آغاز می کنیم که $P_k(x)$ همواره به شکل زیر تجزیه می شود:

$$P_n(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)$$

از برابر هم قرار دادن جمله ها نتیجه می گیریم

$$a_k = (-1)^k a_1 a_2 \dots a_k$$

و چون a_k ناصفر است، پس

$$a_1 a_2 \dots a_{k-1} = (-1)^k$$

از آنجا که a_i ها عددهایی صحیح اند، معلوم می شود که هریک از ضریبهای a_1, a_2, \dots, a_{k-1} باید یا $+1$ باشد یا -1 . در نتیجه مقسوم علیه نظیر آنها در $P_k(x)$ یا $x-1$ است یا $x+1$. هرگاه i تعداد ضریبهای a_1, a_2, \dots, a_{k-1} باشد که برابر با $+1$ هستند، نتیجه می شود

$$P_k(x) = (x-1)^i (x+1)^{k-1-i} (x-a_k)$$

اینک با بسط این عاملها و ضرب آنها در یکدیگر معلوم می شود که جمله آخر باید برابر با a_k باشد. ولی اگر i عددی صحیح و زوج باشد، جمله نهایی در $(x-1)^i$ برابر است با $+1$ که این امر به پدید آمدن جمله نهایی $-a_k$ می انجامد، زیرا $(x+1)^{k-1-i}$ همواره به $+1$ ختم می شود. از اینجا نتیجه می شود $a_k = -a_k$ و یا $a_k = 0$ که تناقض است. در نتیجه i باید فرد باشد.

در این حالت، دست‌کم یکی از ریشه‌ها باید ۱+ باشد و در نتیجه $P_k(1) = 0$. بنابراین

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = -1 \text{ و } 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k = 0$$

از طرف دیگر با مساوی هم قرار دادن ضریبهای x^{k-1} در شکل تجزیه شده $P_k(x)$ معلوم می‌شود که مجموع ریشه‌ها برابر با $-a_1$ است:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = -a_1$$

در اینجا به این نتیجه کم اهمیت توجه کنید که a_1 باید همواره برابر با ۱ باشد. اینک می‌توان نوشت

$$a_k = -1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1})$$

و چون a_1, a_2, \dots, a_{k-1} از i تا 1 و $(k-1-i)$ تا -1 تشکیل شده‌اند، پس

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} = i - (k-1-i) = -k + 2i + 1$$

که در نتیجه

$$a_k = -1 + k - 2i - 1 = k - 2i - 2$$

و

$$P_k(x) = (x-1)^i(x+1)^{k-1-i}[x - (k-2i-2)]$$

از آنجا که همواره بهتر است برای محکم کردن جای پایمان به چند حالت اولیه توجه کنیم، چند مقدار نخستین k را بررسی می‌کنیم.

$k=1$: این حالت کاملاً ساده است، زیرا از $P_1(x) = x + a_1 = 0$ نتیجه می‌شود ریشه a_1 باید برابر با $-a_1$ باشد و در نتیجه $a_1 = 0$ که تناقض است. به ازای $k=1$ ، هیچ $P_n(x)$ وجود ندارد و به ازای $n=1$ ، فقط یک $P_n(x)$ به دست می‌آید که همان $P_1(x) = x$ است که از شکل کلی $P_n(x) = x^n$ به دست می‌آید.

$k=2$: در این حالت عدد صحیح و فرد i فقط ممکن است ۱ باشد (به یاد آورید که $i < k$) از اینجا معلوم می‌شود $a_k = k - 2i - 2 = -2$ و در نتیجه

$$P_2(x) = (x-1)^1(x+1)^0(x+2) = x^2 + x - 2$$

که همان مثال نخست است که در آغاز مسأله آمده بود.

$k=3$: باز هم عدد صحیح i فقط ممکن است ۱ باشد و در نتیجه $a_k = k - 2i - 2 = -1$ که ایجاب می‌کند

$$P_3(x) = (x-1)^1(x+1)^1(x+1) = x^3 + x^2 - x - 1$$

که همان مثال دوم در آغاز مسأله است.

$k=4$: در این حالت i یا ۱ است یا ۳.

به ازای $i=1$ نتیجه می‌شود $a_k = k - 2i - 2 = 0$ که تناقض است.

به ازای $i = 3$ نتیجه می شود $a_k = -4$ و

$$\begin{aligned} P_7(x) &= (x-1)^7(x+1)^6(x+4) = (x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 11x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 4x + 4)(x+4) \\ &= x^8 + x^7 - 9x^6 + 11x^5 - 4x^4 + \dots \end{aligned}$$

که در آن $a_7 = -9$ و $a_7 = 11$ ، که برابر با مقدارهای 1 یا -1 نیستند. بنابراین به ازای $k = 4$ هیچ $P_k(x)$ ای وجود ندارد.

$k = 5$: به ازای $i = 1$ نتیجه می شود

$$\begin{aligned} P_5(x) &= (x-1)^1(x+1)^2(x-1) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1) \\ &= x^4 + x^2 - 2x^2 + \dots \end{aligned}$$

که در آن جمله نامناسب $a_2 = -2$ وجود دارد
به ازای $i = 3$

$$\begin{aligned} P_5(x) &= (x-1)^2(x+1)^1(x+3) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 4x + 3) \\ &= x^4 + x^2 - 6x^2 + \dots \end{aligned}$$

که در آن $a_2 = -6$. پس به ازای $k = 5$ نیز $P_k(x)$ ای وجود ندارد.

در اینجا ممکن است دچار تردید شویم که آیا $P_k(x)$ دیگری وجود دارد؟ متأسفانه راه برطرف کردن این تردید روشن نیست. چون تجربه محدود ما نشان داد که مقدار a_2 نامناسب است، ممکن است بتوانیم ثابت کنیم که به ازای مقادیر بزرگتر k ، هیچگاه a_2 برابر با 1 یا -1 نمی شود. برای این کار، فرد بودن عدد i را با جایگزینی $i = 2j - 1$ وارد دستور $P_k(n)$ می کنیم. در این صورت j عددی طبیعی است و $j = k - 4$ و $k - 2i = k - 2 = 2j$ و در نتیجه

$$P_k(x) = (x-1)^{2j-1}(x+1)^{k-2j}[x - (k-4j)]$$

به نظر می رسد که برای محاسبه جمله x^{k-2} راهی بجز بسط دادن و محاسبه واقعی وجود ندارد و اگرچه این امر تا اندازه ای از زیبایی راه حل می کاهد اما چاره ای نیست. از این رو

$$\begin{aligned} (x-1)^{2j-1} &= x^{2j-1} - (2j-1)x^{2j-2} + \frac{(2j-1)(2j-2)}{2}x^{2j-3} + \dots \\ (x+1)^{k-2j} &= x^{k-2j} + (k-2j)x^{k-2j-1} + \frac{(k-2j)(k-2j-1)}{2}x^{k-2j-2} + \dots \end{aligned}$$

$$x - a_k = x - (k - 4j)$$

پنج جمله از x^{k-2} وجود دارد که ضریب a_2 را تشکیل می دهند:

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{(2j-1)(2j-2)}{2} + 1 \cdot (k-2j)[- (2j-1)] + 1 \cdot \frac{(k-2j)(k-2j-1)}{2} \cdot 1 \\ &\quad + [- (k-4j)] \cdot 1 \cdot [- (2j-1)] + [- (k-4j)](k-2j) \cdot 1 \end{aligned}$$

چون $a_2 = +1$ یا $a_2 = -1$ پس

$$(2j-1)(j-1) - (k-2j)(2j-1) + \frac{1}{4}(k-2j)(k-2j-1)$$

$$+ (k-4j)(2j-1) - (k-4j)(k-2j) = +1 \text{ یا } -1$$

$$2j^2 - 2j + 1 - 2jk + 4j^2 + k - 2j + \frac{1}{4}(k^2 - 4jk + 4j^2 - k + 2j)$$

$$+ 2jk - 8j^2 - k + 4j - k^2 + 6jk - 8j^2 = +1 \text{ یا } -1$$

$$-8j^2 + 4jk - \frac{1}{4}k - \frac{1}{4}k^2 = 0 \text{ یا } -2$$

$$16j^2 - 8jk + k + k^2 = 0 \text{ یا } 4$$

یعنی یا

$$16j^2 - 8jk + (k^2 + k) = 0 \quad (1)$$

و یا

$$16j^2 - 8jk + (k^2 + k - 4) = 0 \quad (2)$$

اینک j عددی طبیعی است و در نتیجه اگر این معادله‌ها را برحسب j حل کنیم، D ، مبین آنها باید منفی باشد. در حالت (۱) نتیجه می‌شود

$$D = 64k^2 - 64(k^2 + k) = -64k < 0$$

و در حالت (۲) معلوم می‌شود

$$D = 64k^2 - 64(k^2 + k - 4) = -64(k - 4)$$

که به دلیل اینکه $D, k \geq 5$ همواره منفی است. از این تناقض معلوم می‌شود که a_2 دیگر مقدار قابل قبولی را اختیار نمی‌کند و در حقیقت $P_k(x)$ دیگری یافت نمی‌شود. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $P_n(x)$ برابر با یکی از چند جمله‌ایهای $x, x^2 + x - 2, x^2 + x - 1, x^2 + x^2 - x - 1$ یا حاصل ضرب یکی از توانهای x در آنهاست:

$$P_n(x) = x^t \cdot x, \quad x^t(x^2 + x - 2) \quad \text{یا} \quad x^t(x^2 + x^2 - x - 1), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

مسأله ۲

(را حل دیگری در کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۹، ۲۶۴ آمده است.)

این مسأله درباره دنباله‌هایی مانند $x_1 x_2 \dots x_n$ است که در آنها هریک از x_i ها برابر است با a, b یا c . تعداد این‌گونه دنباله‌ها را بیابید در صورتی‌که

(الف) طول آنها برابر با n باشد،

(ب) ابتدا و انتهای همه آنها حرف a باشد، و

(ج) همواره در آنها جمله‌های مجاور حرفهای متمایز باشند.

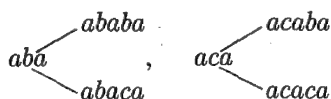
راه حل

اگرچه این نوع مسأله‌ها جزء مباحث استاندارد در ترکیبیات مقدماتی هستند، ولی با این حال در این مسأله دشواری جالب توجهی وجود دارد و این فرصت ایجاد می‌شود که بتوانیم نحوه استفاده از فن ترکیباتی نیرومند و رایجی را نشان دهیم.

اگر بخواهیم به بهترین سنت ریاضیات پایتد باشیم، نخست نگاه مختصری به دنباله‌های نظیر چند مقدار کوچک n می‌اندازیم. فرض کنید تعداد دنباله‌های به طول n را با t_n نشان دهیم.

n	دنباله‌ها	t_n
۱	a	۱
۲	هیچ	۰
۳	aba, aca	۲
۴	$abca, acba$	۲
۵	$ababa, abaca, acaba, acaca, abcba, acbca$	۶

با توجه به این جدول کوتاه می‌توانیم به خوبی قاعده‌ای کلی را که بر دنباله $\{t_n\}$ حاکم است بیابیم. هرگاه بکوشیم که روشی بیابیم که احتمالاً به وسیله آن قادر باشیم به کمک دنباله‌های کوچکتر دنباله‌هایی به طول n بسازیم، ممکن است متوجه این مطلب شویم که دنباله‌ای به طول n را می‌توان با افزودن ba یا ca به انتهای دنباله‌ای به طول $n-2$ به دست آورد. برای مثال



البته همه دنباله‌هایی که به این روش ساخته می‌شوند در سومین مکان ماقبل آخرشان حرف a دارند. به عکس، هرگاه در دنباله‌ای به طول n سومین مکان ماقبل آخر حرف a باشد، با حذف دو جمله آخرش دنباله قابل قبولی به طول $n-2$ به دست می‌آید. بنابراین تعداد دنباله‌هایی که سومین جمله ماقبل آخرشان حرف a باشد $2t_{n-2}$ است.

در بقیه دنباله‌های به طول n ، سومین جمله ماقبل آخر یا b است یا c ، و با حذف جمله ماقبل آخر هر دنباله‌ای از این نوع دنباله‌ای به طول $n-1$ به دست می‌آید

$$a \cdots bca \rightarrow a \cdots ba$$

$$a \cdots cba \rightarrow a \cdots ca$$

(این کار وقتی که سومین جمله ماقبل آخر حرف a است مجاز نیست). به عکس، تنها می‌توان یک حرف را بین دو جمله آخر دنباله‌ها قرار داد و بدیهی است که با انجام این کار دنباله‌ای به طول $n-1$ به دنباله‌ای به طول n تبدیل می‌شود. بنابراین t_{n-1} دنباله به طول n وجود دارد که در هریک از آنها سومین جمله ماقبل آخر یا b است یا c و در مجموع نتیجه می‌شود

$$t_n = t_{n-1} + 2t_{n-2}$$

از نظر برخی از شرکت‌کنندگان مشکل در اینجا رفع شده است زیرا راه‌حل سراسر است این‌گونه رابطه‌های بازگشتی در بسیاری از برنامه‌های آموزشی المپیاد وجود دارد. با این حال، اگر به راه‌حل سراسر است این‌گونه رابطه‌های تسلط ندارید، توجه کنید که چگونه استفاده از تابع‌های مولد به‌زیبایی دستوری برای t_n به‌دست می‌دهد.

اگر اعداد نامعلوم t_n را ضریب‌های سری توانی $f(x)$ به شکل

$$f(x) = t_1 + t_2 x + t_3 x^2 + \dots + t_n x^{n-1} + \dots$$

در نظر بگیریم، آنگاه

$$x \cdot f(x) = t_1 x + t_2 x^2 + \dots + t_{n-1} x^{n-1} + \dots$$

و

$$2x^2 \cdot f(x) = 2t_1 x^2 + \dots + 2t_{n-2} x^{n-1} + \dots$$

اگر سطرهای دوم و سوم را از سطر اول کم کنیم، با توجه به رابطه بازگشتی $t_n - t_{n-1} - 2t_{n-2} = 0$ نتیجه می‌گیریم

$$(1 - x - 2x^2)f(x) = t_1 + (t_2 - t_1)x$$

$$= 1 - x$$

(به یاد آورید که $t_1 = 1$ و $t_2 = 0$) و بنابراین

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x-2x^2}$$

اگر این عبارت را به کسرهای جزئی تجزیه کنیم حاصل می‌شود

$$\frac{1-x}{(1-2x)(1+x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1+x}$$

$$1-x = A(1+x) + B(1-2x)$$

به‌ازای $\frac{1}{x} = -1$ ، به‌ترتیب درمی‌یابیم که $2B = 2$ و $\frac{1}{3}A = \frac{1}{3}$ که در نتیجه $A = \frac{1}{3}$ و $B = \frac{2}{3}$. در نتیجه

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}(1-2x)^{-1} + \frac{2}{3}(1+x)^{-1} \\ &= \frac{1}{3}(1+2x+\dots+2^{n-1}x^{n-1}+\dots) \\ &\quad + \frac{2}{3}(1-x+\dots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\dots) \end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود ضریب t_n مربوط به x^{n-1} برابر است با

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} + \frac{2}{3} \cdot (-1)^{n-1} \\ &= \frac{2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3} \end{aligned}$$

مسأله‌ای از المپیاد کانادا، ۱۹۸۸ (با کمی اصلاح)

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۱۶۳)

فرض کنید $S = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ مجموعه‌ای از عددهای طبیعی و دست‌کم شامل دو عضو باشد. به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی از S مانند $A = \{a_i, a_j, \dots, a_k\}$ ، $p(A)$ را برابر با حاصل‌ضرب عضوهایش تعریف می‌کنیم: $p(A) = a_i a_j \dots a_k$. فرض کنید $m(S)$ مقدار میانگین این حاصل‌ضربها باشد که در مورد زیرمجموعه‌های ناتهی S حساب شده است.

بین مجموعه‌هایی مانند S که $m(S) = ۱۳$ ، مجموعه‌ای را تعیین کنید که به‌ازای آن عددی طبیعی مانند a_{r+1} وجود داشته باشد که افزودن این عدد به این مجموعه مقدار m را به عدد ۴۹ افزایش دهد:

$$m(S) = m(a_1, a_2, \dots, a_r) = ۱۳$$

و

$$m(a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1}) = ۴۹$$

راه‌حل

از آنجا که تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه‌ای r تایی برابر با $۲^r - ۱$ است، پس

$$m(S) = \frac{\sum p(A)}{2^r - 1}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \sum p(A) &= (a_1 + a_2 + \dots + a_r) + (a_1 a_2 + \dots + a_{r-1} a_r) + \dots + (a_1 a_2 \dots a_r) \\ &= (2^r - 1)m(S) \end{aligned}$$

اینک برای تعیین میانگین در مورد مجموعهٔ $\{a_1, a_2, \dots, a_{r+1}\}$ ، $\sum p(A)$ جدید برابر است با

$\sum p(A)$ قدیمی به اضافه جمله‌های شامل عدد صحیح جدید a_{r+1} . بنابراین

$$\begin{aligned} m\{a_1, \dots, a_{r+1}\} &= \frac{1}{2^{r+1}-1} \left[\sum p(A) \text{ قدیمی} + a_{r+1} + a_{r+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_r) \right. \\ &\quad \left. + a_{r+1}(a_1 a_2 + \dots + a_{r-1} a_r) + \dots + a_{r+1}(a_1 a_2 \dots a_r) \right] \\ &= \frac{1}{2^{r+1}-1} \left[\sum p(A) \text{ قدیمی} + a_{r+1}(1 + \sum p(A) \text{ قدیمی}) \right] \\ &= \frac{1}{2^{r+1}-1} [(2^r - 1)m(S) + a_{r+1}[1 + (2^r - 1)m(S)]] \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 49 &= \frac{1}{2^{r+1}-1} [(2^r - 1) \times 13 + a_{r+1}[1 + (2^r - 1) \times 13]] \\ 49(2^{r+1} - 1) &= 13 \times 2^r - 13 + a_{r+1}(13 \times 2^r - 12) \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$a_{r+1} = \frac{85 \times 2^r - 36}{13 \times 2^r - 12}$$

حال از آنجا که r باید عددی طبیعی و بزرگتر از ۲ یا مساوی با آن باشد، پس a_{r+1} عددی طبیعی است. اگر $r = 2$

$$a_3 = \frac{85 \times 4 - 36}{13 \times 4 - 12} = \frac{340 - 36}{52 - 12} = \frac{304}{40}$$

پس a_3 عددی صحیح نیست. اگر $r = 3$

$$a_4 = \frac{85 \times 8 - 36}{13 \times 8 - 12} = \frac{680 - 36}{104 - 12} = \frac{644}{92} = 7$$

از آنجا که نمی‌دانیم این جواب منحصر به فرد است یا نه، بررسی نتایج حاصل از حالتی را که $r = 3$ و $a_4 = 7$ دنبال می‌کنیم.

وقتی که $r = 3$ ، مقدار $2^r - 1$ برابر با ۷ است و

$$m(S) = \frac{\sum p(A)}{7} = 13$$

که در نتیجه

$$\sum p(A) = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + (a_1 a_2 a_3) = 91$$

باید جوابی از این معادله را در مجموعه عددهای صحیح، مانند (a_1, a_2, a_3) ، به دست آوریم. باید اذعان کرد که به نظر می‌رسد این مسئله مسأله بغرنجی است، و قیافه این تابعهای متقارن تنها کمکی که به ما می‌کند این است که ما را به یاد عبارت معمولی در نظریه معادلات می‌اندازد:

$$\begin{aligned} (x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \\ = x^3 + (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)x + a_1 a_2 a_3 \end{aligned}$$

بنابراین به ازای $x = 1$ ،

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) = 1 + 91 = 92$$

چون تجزیه ۹۲ به صورت $2 \times 2 \times 23$ است، تنها جواب این معادله در مجموعه عددهای صحیح $(1, 1, 22)$ یا جایگشتی از آن است.

بنابراین حالتی که $r = 3$ ناامید کننده نیست و نتیجه می گیریم که یکی از جوابهای قابل قبول عبارت است از

$$S = \{a_1, a_2, \dots, a_r\} = \{1, 1, 22\}$$

و

$$\{a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1}\} = \{1, 1, 22, 7\}$$

بی تردید به ازای این مقادیر $m(S) = 13$ ولی مطمئن هستیم که همه ما پس از اثبات برابری $m(1, 1, 22, 7) = 49$ آسوده تر می شویم:

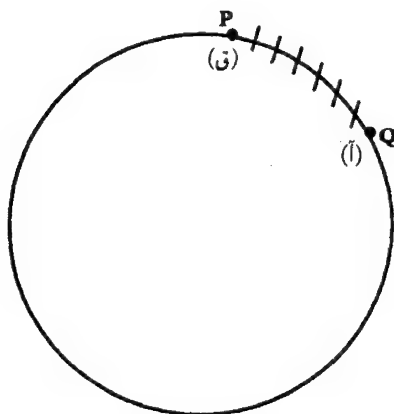
$$\begin{aligned} m(1, 1, 22, 7) &= \frac{1}{2^4 - 1} [(1 + 1 + 22 + 7) + (1 + 22 + 7 + 22 + 7 + 154) \\ &\quad + (22 + 7 + 154 + 154) + 154] \\ &= \frac{1}{15} (31 + 213 + 337 + 154) \\ &= \frac{735}{15} \\ &= 49 \end{aligned}$$

مسأله‌ای دربارهٔ مجموعه‌های بسته

فرض کنید هر نقطه از دایره‌ای با یکی از رنگهای قرمز و آبی (یا احتمالاً با هر دو رنگ) رنگ‌آمیزی شده باشد به طوری که هم مجموعه نقطه‌های قرمز بسته است هم مجموعه نقطه‌های آبی، یعنی هر دو شامل همهٔ نقاط حدی خود هستند. ثابت کنید که اگر مجموعه نقاط قرمز، R ، وتری به طول دلخواه از دایره را مشخص نکند، آنگاه مجموعه نقاط آبی، B ، باید بتواند این کار را انجام دهد.

راه حل

روشن است که حکم مسأله در حالتی که تنها یک رنگ به کار رفته باشد درست است. فرض کنید هر دو رنگ واقعاً به کار رفته باشند و P نقطه‌ای به رنگ قرمز باشد. اینک تنها دو حالت برای وجود نقاط آبی در نزدیکی P وجود دارد (شکل ۷۷ را ببینید).



شکل ۷۷

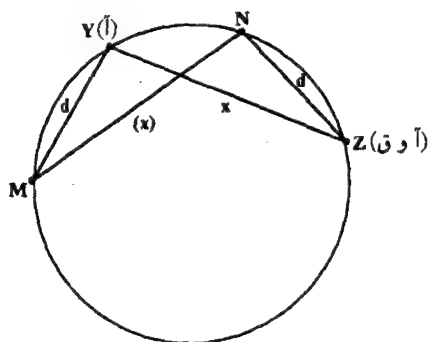
الف) نقاط آبی به اندازه دلخواه نزدیکی به P وجود دارد.

در این حالت P نقطه حدى مجموعه نقاط آبی، B ، است، و چون B بسته است $P \in B$. بنابراین P هم قرمز است هم آبی.

ب) نقطه‌ای مانند Q به رنگ آبی وجود دارد که نزدیکترین نقطه به P است.

در این حالت کمان باز PQ به تمامی به رنگ قرمز است، و در نتیجه Q نقطه حدى R است، و چون R بسته است Q نیز باید نقطه‌ای قرمز رنگ باشد. در هر حالت باید نقطه‌ای مانند Z روی دایره وجود داشته باشد که هم قرمز است هم آبی.

اینک فرض کنید R هیچ وترى به طول x را مشخص نکند. از آنجا که Z قرمز است، وترى مانند ZY به طول x مشخص نمى‌شود مگر اینکه Y آبی باشد. اینک فرض کنید وترهاى YM و ZN به طول دلخواه d در جهت دورى یکسانی مشخص شده‌اند (شکل ۷۸ را ببینید). در این حالت باید طول وتر MN نیز x باشد و چون هیچ جفتى از نقطه‌هاى قرمز وترى با این طول را مشخص نمى‌کنند، پس دست‌کم یکى از نقاط M و N باید آبی باشد. در نتیجه یا ZN باید دو نقطه آبی را به هم وصل کند و یا MY ، و بنابراین مجموعه B واقعاً هر وترى با طول دلخواه d را مشخص مى‌کند.



شکل ۷۸

این مسأله و نیز گنجینه‌ای از نتایج هندسه ترکیبى، شامل مسأله دشوار زیر (همراه با راه‌حل آن)، در کتاب واقعاً برجسته هندسه ترکیبى در صفحه، اثر هادویگر، دوبرانر و کلی، آمده است.

تمرین

اگر هر نقطه از پاره‌خطى به طول واحد به رنگ قرمز یا آبی رنگ‌آمیزی شود به‌طوری‌که هم مجموعه نقطه‌هاى قرمز بسته باشد هم مجموعه نقطه‌هاى آبی، آنگاه دست‌کم یکى از این مجموعه‌ها باید پاره‌خطى از هر طول دلخواه را که بیش از $\frac{1}{2}$ نیست مشخص کند، البته لزومى ندارد این نتیجه در مورد طولهاى که از $\frac{1}{2}$ بیشترند درست باشد.

مسأله‌ای از مسابقات تیمی اتریش - لهستان، ۱۹۸۷

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۳۶)

عددهای صحیحی مانند ۵۵، ۸۹۸ و ۳۰۱۰۳ را که از طرف راست و چپ به یک صورت خوانده می‌شوند عدد مقلوب می‌نامند. در این مسأله با زیرمجموعه‌ای از عددهای مقلوب به نام N سروکار داریم که هر عضو آن دارای ویژگی (ساختگی) زیر است:

حاصل ضرب رقمهای آن سه واحد کمتر از سه برابر مجموع رقمهای آن است؛

$$\text{یعنی، } p = 3s - 3.$$

عددهای ۶۱۶ و ۲۹۲ دو مثال از این نوع عددها هستند که در مورد هر دو آنها

$$p = 36, \quad s = 13$$

ثابت کنید تعداد اعضای N نامتناهی است، ولی تعداد اعضای زیرمجموعه Q از N که اعضایش فاقد رقم ۱ هستند (مانند ۲۹۲) متناهی است. تمام عضوهای Q را بیابید.

راه حل

بدیهی است که p بر ۳ بخش پذیر است و در نتیجه دست کم یکی از رقمهای اعضای N باید بر ۳ بخش پذیر باشد.

حسن استفاده از رقمهای ۱ در اینجا است که با استفاده از آنها مجموع رقمهای عددی که می‌سازیم افزایش می‌یابد بدون اینکه حاصل ضرب آنها تغییر کند. به این ترتیب می‌توان مجموع ناقص عدد فعلی را به مقدار موردنظر، یعنی $s = \frac{p+3}{3}$ ، رساند. برای مثال، فرض کنید در جستجوی عضوهای مجموعه N عدد صحیحی را تا مرحله ۵۳۵ ساخته‌ایم. در این حالت حاصل ضرب فعلی، p ، برابر با ۷۵ و مجموع فعلی، s ، برابر با ۱۳ است. با وجود این، به ازای $p = 75$ از شرط $s = \frac{p+3}{3}$ نتیجه می‌شود $s = \frac{78}{3} = 26$. یعنی اینکه برای برقرار شدن شرط مسأله مجموع فعلی نیازمند ۱۳

واحد دیگر است. مشکل اینجاست که به دلیل فرد بودن عدد ۱۳ نمی‌توانیم تعداد $۶\frac{1}{۳}$ عدد ۱ به دو طرف ۵۳۵ اضافه کنیم تا خصلت مقلوب بودن آن حفظ شود. اما این مشکل کوچکی است، زیرا اگر کار خود را با قطعه‌ای میانی که شامل تعداد زوجی از رقمهای برابر است، مانند ۵۳۳۵، آغاز کنیم، تعداد رقمهای ۱ لازم برای افزایش مجموع به مقدار مورد نیاز اهمیتی ندارد، زیرا: اگر این مقدار عددی زوج بود، نیمی از ۱ها را در طرف راست و نیم دیگر را در طرف چپ عدد بگذارید؛ اگر این تعداد عددی فرد بود، یکی از ۱ها را درست بین دو عدد ۳ و نیمی از بقیه را در طرف راست و نیم دیگر را در طرف چپ عدد مورد نظر قرار دهید. در مورد عدد ۵۳۳۵، $p = ۲۲۵$ ، و در نتیجه

$$s = \frac{۲۲۸}{۳} = ۷۶$$

درحالی که مجموع فعلی آن ۱۶ است. حال در هر دو انتهای این عدد ۳۰ عدد ۱ می‌گذاریم تا ترفندمان به کار آید. بنابراین

$$\underbrace{۱۱ \dots ۱۵۳۳۵}_{تا ۳۰} \underbrace{۱ \dots ۱}_{تا ۳۰} \in N$$

البته این شیوه فقط وقتی مؤثر است که مجموع فعلی نیاز به افزایش داشته باشد. ولی این مسأله نیز به آسانی حل می‌شود. برای مثال، در عددهای ۴ رقمی، مجموع رقمهای هر عدد بیشتر از $۳۶ = ۹ \times ۴$ نیست و در نتیجه برای اینکه بتوانیم از این شیوه استفاده کنیم لازم است که حاصل ضرب p از عدد $۱۰۵ = ۳ \times ۳۶ - ۳$ بیشتر باشد. (این وضعیت در عددهایی مانند ۵۳۳۵ و بسیاری از انتخابهای دیگر نیز روی می‌دهد.) بنابراین کاملاً بدیهی است که N مجموعه‌ای نامتناهی است. با وجود این، برهانی واقعی که براساس مطالب بالا باشد نیازمند پیدا کردن دستوری است که تعدادی نامتناهی از عضوهای N را تولید کند. باز هم این مسأله مهمی نیست زیرا تعدادی دستور وجود دارد که می‌توانیم از آنها استفاده کنیم.

فرض کنید که تنها از رقمهای ۵ و ۳ استفاده کنیم. عددی را در نظر بگیرید که دو رقم ۳ در وسط و k رقم ۵ در هر طرف داشته باشد:

$$\underbrace{۵۵ \dots ۵۳۳۵ \dots ۵}_{تا k}$$

در این صورت $p = ۹ \times ۵^{۲k}$ و در نتیجه باید $s = ۳ \times ۵^{۲k} + ۱$ بنابراین لازم است که مجموع فعلی به اندازه

$$۳ \times ۵^{۲k} + ۱ - (۱۰k + ۶) = ۳ \times ۵^{۲k} - ۱۰k - ۵$$

که عددی زوج است، افزایش یابد. بنابراین، به ازای هر عدد طبیعی مانند k ،

$$\underbrace{۱۱ \dots ۱}_{تا \frac{1}{۳}(۳ \times ۵^{۲k} - ۱۰k - ۵)} \underbrace{۵۵ \dots ۵۳۳۵ \dots ۵}_k \underbrace{۱ \dots ۱}_{تا k} \underbrace{۱ \dots ۱}_{تا \frac{1}{۳}(۳ \times ۵^{۲k} - ۱۰k - ۵)} \in N$$

به‌ازای $k = 2$ ، نتیجه می‌شود

$$\underbrace{11 \dots 11}_{\text{تا } 925} 5533551 \underbrace{\dots 11}_{\text{تا } 925} \in N$$

$$. (s = 1876 \text{ و } p = 9 \times 5^4 = 5625)$$

از طرف دیگر، عضوهای Q ، که فاقد رقم ۱ هستند، رقمهای زیادی ندارند. اگر عضوی از Q ، n رقم داشته باشد، با توجه به اینکه دست‌کم یکی از رقمهای آن باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد، آنگاه

$$p \geq 3 \times 2^{n-1}, \quad s \leq 9n$$

بنابراین

$$27n - 3 \geq 3s - 3 = p \geq 3 \times 2^{n-1}$$

و در نتیجه

$$9n - 1 \geq 2^{n-1}$$

که مطمئناً به‌ازای $n \geq 7$ نادرست است (اثبات این مطلب به استقرا تمرینی ساده است). بنابراین هیچ‌یک از اعضای Q بیش از ۶ رقم ندارد، و در نتیجه Q متناهی است. می‌توانم بگویم آنچه از حل مسأله مانده بررسی چندین حالت است. شاید همین امر دلیل این است که این مسأله مسأله تیمی خوبی است؛ درحالی‌که عضوی از تیم عددهای ۳ رقمی را بررسی می‌کند، عضو دیگری عددهای ۴ رقمی را بررسی می‌کند، والی آخر. به هر حال، بنابر بررسیهایی که انجام داده‌ام تنها عضو Q ، ۲۹۲ است. از آنجا که بررسی جزئیات این مطلب خسته‌کننده است به مسائل جالبتری می‌پردازیم.

دو مسأله از مسابقات ریاضی اتریش - لهستان، ۱۹۸۷

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۳۵. راه حل دیگری برای این مسأله در کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۹، ۲۶۹، و تذکر مربوط به آن در ۱۹۹۰، ۱۰۱، آمده است.)

مسأله ۱

آیا مجموعه $\{1, 2, \dots, 3000\}$ از X زیرمجموعه‌ای ۲۰۰۰ عضوی مانند A دارد به طوری که هیچ عضوی از A دو برابر عضو دیگری از آن نباشد؟

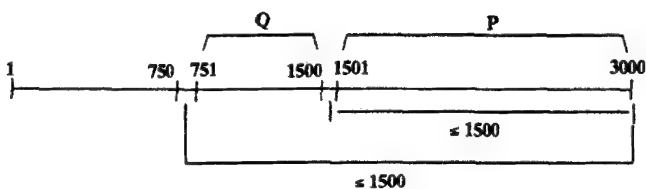
راه حل

از آنجا که دو برابر هر عدد صحیح در بازه $P = [1501, 3000]$ بزرگتر از آن است که به مجموعه X تعلق داشته باشد، می‌توانیم این ۱۵۰۰ عدد را بدون نگرانی در مجموعه A قرار دهیم. از طرف دیگر A از P بیش از ۱۵۰۰ عدد صحیح عایدش نمی‌شود، زیرا این مجموعه روی هم ۱۵۰۰ عدد صحیح دارد. بدیهی است که باید دقت کنیم عدد صحیحی از بازه $Q = [1, 750]$ انتخاب نشود، زیرا این عدد نصف عددی صحیح است که از P انتخاب شده است. همچنین بدیهی است که انتخاب هر عدد صحیح از Q امکان انتخاب دو برابر آن را از P نفی می‌کند. بنابراین اگر k عدد صحیح از Q انتخاب شود نمی‌توانیم بیش از $k - 1500$ عدد از مجموعه P انتخاب کنیم، زیرا نمی‌توانیم روی هم بیش از ۱۵۰۰ عدد صحیح از بازه $Q \cup P = [1, 3000]$ انتخاب کنیم. بنابراین برای اینکه ۲۰۰۰ عدد صحیح برای A جور کنیم دست‌کم باید ۵۰۰ عدد از بازه $[1, 750]$ ، یعنی ربع اول مجموعه X ، انتخاب کنیم (شکل ۷۹ را ببینید).

استفاده مکرر از این استدلال به نتایج صفحه بعد می‌انجامد.

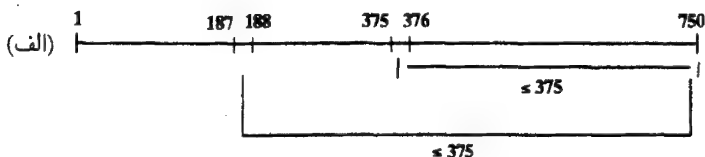
با وجود این، پرسش مسأله نامعقول نیست، زیرا بدیهی است که می‌توانیم برای A ،

$$1 + 6 + 23 + 94 + 375 + 1500 = 1999$$

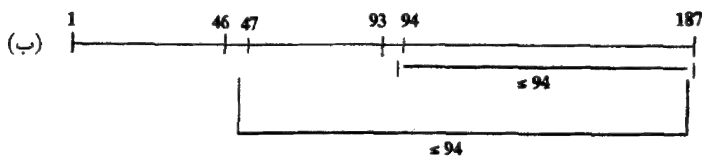


باید دستکم ۵۰۰ عدد از بازه $[1, 750]$ انتخاب شود.

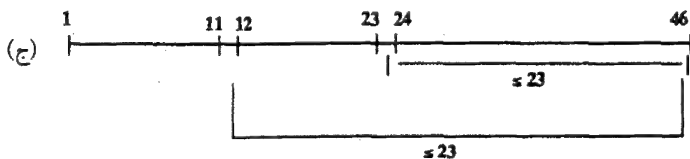
شکل ۷۹



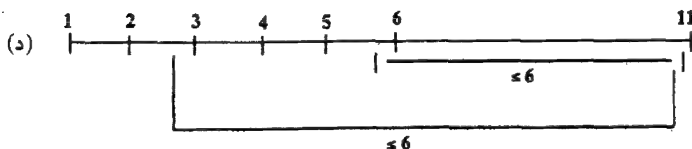
باید دستکم ۱۲۵ عدد از بازه $[1, 187]$ انتخاب شود.



باید دستکم ۳۱ عدد از بازه $[1, 46]$ انتخاب شود.



باید دستکم ۸ عدد از بازه $[1, 11]$ انتخاب شود.



باید دستکم ۲ عدد از بازه $[1, 2]$ انتخاب شود،

و چنین کاری ممکن نیست.

شکل ۸۰ (الف - د)

عدد صحیح جور کنیم.

از این نتیجه چنین برمی آید که $\frac{2}{3}$ تعداد عددهای صحیح موجود در X حد بالای اندازه مجموعه A است؛ به عبارت دیگر، $|A|$ را می توان برابر با هر عددی تا حد $\frac{2}{3}$ اندازه X گرفت، ولی دقیقاً برابر با $|X|$ نمی توان. با استفاده از بررسی بالا درباره مجموعه $X = \{1, 2, \dots, 300\}$ درمی یابیم که می توان A را ۲۰۰ عضوی گرفت:

$$A = \underbrace{\{1, 3, 4\}}_2 + \underbrace{\{10, 11, \dots, 18\}}_9 + \underbrace{\{38, 39, \dots, 75\}}_{28} + \underbrace{\{151, 152, \dots, 300\}}_{150=200}$$

ولی این مجموعه تا حد ممکن پر شده است، بنابراین نتیجه می گیریم که نتیجه کلی به بیان دقیقتر این است $|A| \leq \frac{2}{3}|X|$.

موجب خوشوقتی است که اطلاع دهیم بروس رزنیک (از دانشگاه ایلی نوی در اوربانا - کمپین)، اخیراً فرمول زیبای زیر را برای ماکسیمم اندازه زیرمجموعه ای از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ که در آن هیچ عضوی r برابر عضو دیگر نباشد، که آن را با $f_r(n)$ نشان می دهیم، به دست آورده است. اگر نمایش عدد n را در مبنای r بنویسیم، یعنی

$$n = a_m a_{m-1} \dots a_0$$

آنگاه

$$f_r(n) = \frac{1}{r+1} \left(m + \sum_{k=0}^m (-1)^k a_k \right)$$

از آنجا که نمایش عدد $n = 3000$ در مبنای ۲ به صورت 101110111000 است، نتیجه می شود

$$\begin{aligned} f_2(3000) &= \frac{1}{3} [2 \times 3000 + (-1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1^{-1})] \\ &= \frac{1}{3} (6000 - 3) \\ &= 1999 \end{aligned}$$

که همان نتیجه ای است که در بالا به دست آمد.

مسأله ۲

فرض کنید نقاط فضای سه بُعدی به سه زیرمجموعه ناتهی مانند A_1 ، A_2 و A_3 افراز شده اند. ثابت کنید نقاط دست کم یکی از این زیرمجموعه ها همه فاصله های ممکن را به دست می دهند، یعنی، ثابت کنید که یکی از زیرمجموعه ها، مانند A_i ، به گونه ای است که به ازای هر عدد حقیقی و مثبت مانند d ، دو نقطه در A_i وجود دارند که فاصله آنها از یکدیگر برابر با d است.

راه حل

بدیهی است که تنها دو امکان وجود دارد: یا

یک) هریک از مجموعه‌های A_1, A_2 و A_3 فاقد این ویژگی است که همه فاصله‌ها را به دست دهد؛ و یا دو) دست کم یکی از آنها این ویژگی را دارد.

از آنجا که می‌خواهیم درستی (دو) را ثابت کنیم، ثابت می‌کنیم که (یک) منجر به تناقض می‌شود. بنابراین فرض کنید

الف) A_1 فاصله d_1 را به دست ندهد؛

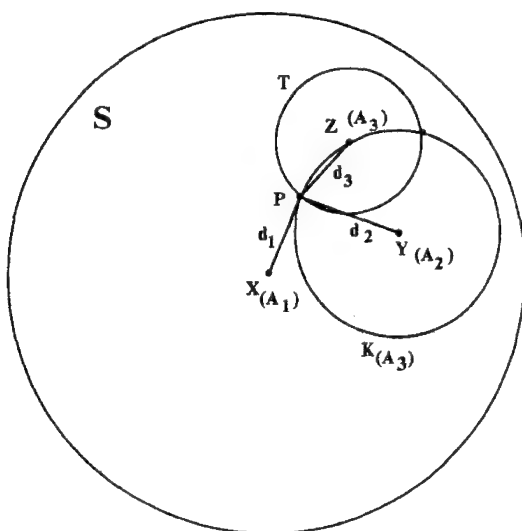
ب) A_2 فاصله d_2 را به دست ندهد؛ و

ج) A_3 فاصله d_3 را به دست ندهد.

بدون کاسته شدن از کلیت استدلال می‌توانیم فرض کنیم $d_1 \geq d_2 \geq d_3$.

فرض کنید X نقطه‌ای از A_1 و S کره‌ای به مرکز X و به شعاع d_1 باشد (شکل ۸۱ را ببینید). اگر نقطه‌ای روی S به مجموعه A_1 تعلق داشته باشد، مجموعه A_1 فاصله d_1 را تولید می‌کند که با فرض الف) تناقض دارد. بنابراین هر نقطه S باید یا به A_2 تعلق داشته باشد یا به A_3 .

اگر هر نقطه S متعلق به A_3 باشد، چون $d_3 \leq d_1$ ، مجموعه A_3 فاصله d_3 را تولید می‌کند که با فرض ج) تناقض دارد (توجه کنید که وترهای دایره‌های عظیمه S ، همه فاصله‌های ممکن را تا حد $2d_1$ به دست می‌دهند و $2d_1$ از d_3 بزرگتر است). بنابراین نقطه‌ای از S مانند Y باید به A_2 تعلق داشته باشد.



شکل ۸۱

اینک، چون (شعاع $S = d_1$)، کره‌ای به مرکز Y و به شعاع d_1 ، کره S را در دایره‌ای مانند K قطع می‌کند و هیچ نقطه‌ای از K به A_2 تعلق ندارد و این نتیجه با فرض (ب) تناقض ندارد. از آنجا که هر نقطه S به یکی از دو مجموعه A_2 و A_3 تعلق دارد، سپس K باید تماماً در مجموعه A_3 باشد. در نهایت، کره T به شعاع d_3 و به مرکز نقطه دلخواه Z از K ، دایره K را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کند که این نقطه

اگر روی S باشد فاصله‌اش از X برابر با d_1 است،

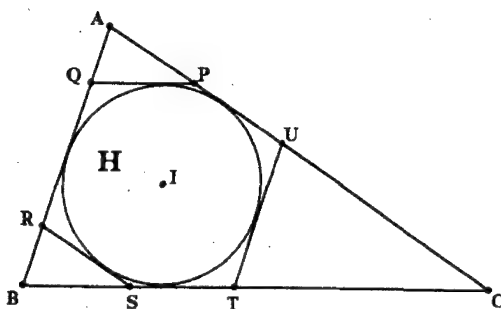
اگر روی K باشد فاصله‌اش از Y برابر با d_2 است، و

اگر روی T باشد فاصله‌اش از Z برابر با d_3 است.

بنابراین نقطه P در هر مجموعه‌ای که باشد یکی از فرضهای ما را نقض می‌کند و به این ترتیب استدلال کامل می‌شود.

ویژگی جالبی از دایره محاطی مثلث

(مسألة ۱۲۴۵، کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۸، ۱۸۹)



شکل ۸۲

فرض کنید شش ضلعی $H = PQRSTU$ از رسم مماسهایی بر دایره محاطی $\triangle ABC$ به موازات ضلعهای آن پدید آمده است. ثابت کنید محیط H هرگز از $\frac{2}{3}$ محیط $\triangle ABC$ بیشتر نمی شود. این مسأله از والتر یانوش از دبیرستان اورسولین شهر اینسبروک در کشور اتریش، و راه حل آن از هانس انگل هاوِپت^۱ از شهر گوندلس هیم در کشور آلمان است.

راه حل

از آنجا که با نگاهی سطحی به شکل ۸۲ احساس می کنیم ضلعهای H طولهای متفاوتی دارند و زاویه های نامشخصی با یکدیگر می سازند، بعید نیست این مطلب را که ضلعهای مقابل در H همطول اند نادیده بگیریم. با استفاده از نیمدوری حول مرکز دایره محاطی مثلث، I ، به آسانی قانع می شویم که این مطلب درست است. برای مثال، ضلعهای RQ و QP ، روی خطهای موازی با آنها و شامل ضلعهای مقابل آنها، UT و TS ، قرار می گیرند، و در نتیجه نقطه تقاطع آنها، Q ، باید به نقطه تقاطع این خطها،

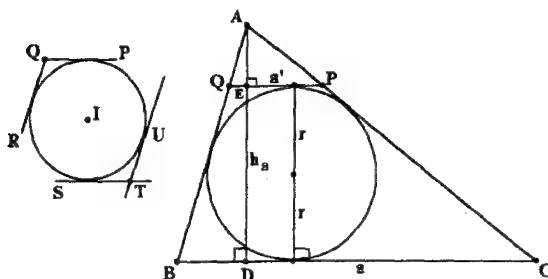
1. Hans Engelhaupt

یعنی T ، منتقل شود. به همین ترتیب، P به S منتقل می‌شود و در نتیجه $QP = TS$. اگر طول مماسها برابر باشند با $a' = PQ$ ، $b' = RS$ و $c' = TU$ ، آنگاه $a' + b' + c'$ برابر با نصف محیط H است و نسبت مورد نظر، L ، برابر است با

$$L = \frac{H \text{ محیط}}{\Delta ABC \text{ محیط}} = \frac{\text{نصف محیط } H}{\text{نصف محیط } \Delta ABC} = \frac{a' + b' + c'}{s}$$

اگر ارتفاع نظیر رأس A و طولش h_a باشد (شکل ۸۳ را ببینید)، آنگاه، چون QP موازی با BC است، مثلث AQP با ΔABC متشابه است و

$$\frac{QP}{BC} = \frac{a'}{a} = \frac{AE \text{ طول ارتفاع}}{AD \text{ طول ارتفاع}} = \frac{h_a - DE}{h_a} = \frac{h_a - 2r}{h_a} = 1 - \frac{2r}{h_a}$$



شکل ۸۳

با توجه به این دستور معروف که $rs = (\text{مساحت مثلث})$ ، می‌توان نوشت $\frac{1}{4}ah_a = rs$ ، و در نتیجه $\frac{2r}{h_a} = \frac{a}{s}$. بنابراین

$$\frac{a'}{a} = 1 - \frac{a}{s}$$

و

$$a' = a - \frac{a^2}{s}$$

اگر عبارتهای مشابهی را در مورد b' و c' در نظر بگیریم، نسبت مطلوب به صورت زیر درمی‌آید

$$L = \frac{a - \frac{a^2}{s} + b - \frac{b^2}{s} + c - \frac{c^2}{s}}{s} = \frac{a + b + c - \frac{1}{s}(a^2 + b^2 + c^2)}{s}$$

و چون $a + b + c = 2s$ ، پس

$$L = 2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s^2} = 2 - \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2}$$

کافی است گرانی برای $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2}$ بیابیم.

در اینجا هانس اینگل هاویت با زیرکی به این نکته توجه دارد که هر مجموعی از مربعات عددی نامنفی است، و در نتیجه

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

پس از بسط دادن و جابه‌جا کردن جمله‌ها به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2 + c^2) &\geq 2ab + 2bc + 2ac \\ &= (a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2$$

و

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2} \geq \frac{1}{3}$$

(این نابرابری را می‌توان مستقیماً با استفاده از نابرابری میانگین نمایی نیز به دست آورد).
بنابراین

$$L \leq 2 - 4 \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

که همان نتیجهٔ مطلوب است.

مسأله‌ای در بارهٔ سقفها و کفها

(مسألهٔ ۱۰۸۱، کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۹۳)

اغلب اعداد حقیقی غیر صحیح در مسائلی ظاهر می‌شوند که در آنها تنها به عددهای صحیح علاقه‌مندیم. برای مثال، اگر بدانیم که n عددی صحیح است، شرط $n \leq ۶,۲۵$ بر شرط $n \leq ۶$ ارجحیتی ندارد. به همین ترتیب نابرابری $n \geq ۶,۲۵$ چیزی بیش از $n \geq ۷$ به ما نمی‌گوید. در ترکیبیات همواره اعداد را به بالا یا به پایین گرد می‌کنیم. نتیجهٔ این کارها تابعه‌ایی به نام تابعهای کف و سقف است که آنها را به صورت زیر نشان می‌دهند

بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از یا برابر با $x = \lfloor x \rfloor$ کف x یا $[x]$
(گرد کردن به پایین)

کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از یا برابر با $x = \lceil x \rceil$ سقف x
(گرد کردن به بالا)

بنابراین

$$\lfloor ۶,۲۵ \rfloor = ۶, \quad \lceil ۶,۲۵ \rceil = ۷$$

مسائل جالبی شامل $\lfloor x \rfloor$ و $\lceil x \rceil$ وجود دارند که برخی از آنها تا حدی آزاردهنده‌اند، زیرا ما علاقهٔ زیادی به استفاده از پیوستگی اعداد حقیقی داریم. به هر حال، امیدوارم که از مسألهٔ زیبایی زیر که مربوط به لورن لارسن (از کالج سنت اولاف، نورث فیلد، مینه‌سوتا) است، لذت ببرید. راه حل مسأله، از سوی مارگالیت است، که در هنگام حل این مسأله، دانش آموز کلاس ۱۱ دبیرستان ا. ب. لوکاس در شهر لندن از ایالت آنتاریو (کانادا) بوده است.

b عددی صحیح است و $b > ۱$. مقدار انتگرال زیر چیست؟

$$I = \int_1^{\infty} \left\lfloor \log_b \left\lceil \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \right\rceil \right\rfloor dx$$

راه حل

شاید بتوانیم از این حقیقت استفاده کنیم که انتگرالده، $e(x)$ ، عددی صحیح است، زیرا به نظر می‌رسد که این تابع تابع پله‌ای خاصی باشد. از آنجا که معمولاً بهتر است برای آشنایی با تابعی ناآشنا چند مقدار از آن را حساب کنیم، بیایید ببینیم که مقدار این تابع مثلاً به‌ازای $x = ۶٫۲۵$ چه می‌شود. در این مورد

$$[x] = ۷, \frac{[x]}{x} = \frac{۷}{۶٫۲۵}$$

پس $\frac{[x]}{x}$ عددی بین ۱ و ۲ است و در نتیجه $\left\lfloor \frac{[x]}{x} \right\rfloor = ۱$. بنابراین مقدار b هر چه باشد،

$$\log_b ۱ = ۰$$

و در نتیجه

$$[\log_b ۱] = ۰, e(۶٫۲۵) = ۰$$

در حقیقت، به‌ازای هر x ، $x \geq ۱$ ، به همین نتیجه می‌رسیم، زیرا مقدار گردشده به بالای هر x ، $x \geq ۱$ ، هرگز بیشتر از $۲x$ نمی‌شود، و بنابراین $[x]/x$ عددی بین ۱ و ۲ است (ممکن است برابر با ۱ باشد ولی همواره کمتر از ۲ است) و در نتیجه کف آن برابر با ۱ و لگاریتم کف آن برابر با ۰ است و $e(x) = ۰$. بنابراین می‌توانیم از همهٔ x هایی که $x \geq ۱$ صرف‌نظر کنیم، زیرا

$$I = \int_{\cdot}^{\infty} e(x) dx = \int_{\cdot}^1 e(x) dx$$

باید دقت کنیم که انتگرالده در $x = ۰$ تعریف نشده است (زیرا $([0]/0 = 0/0)$ ، و در نتیجه انتگرال موردنظر انتگرالی ناسره است و در حقیقت مقدار آن برابر است با

$$I = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 e(x) dx$$

با وجود این لازم نیست با فرایند حدی عذاب‌آور بالا سروکار داشته باشیم، زیرا همان‌طور که خواهیم دید، این ناپوستگی در $x = ۰$ هیچ مسأله‌ای ایجاد نمی‌کند.

به‌ازای همهٔ x هایی که $x < ۱$ ، بدیهی است که $[x] = ۱$ و بنابراین $\frac{[x]}{x} > ۱$ و در نتیجه $\left\lfloor \frac{[x]}{x} \right\rfloor$ عددی طبیعی است.

از آنجا که لگاریتم در پایهٔ b همهٔ عددهای واقع بین b^k و b^{k+1} بین k و $k+۱$ قرار دارد، گردشدهٔ به پایین همهٔ آنها عدد صحیح k است. به عبارت دیگر، به‌ازای x هایی که

$$\left\lfloor \frac{[x]}{x} \right\rfloor = b^{k \cdot abc \dots} \text{ یعنی } b^k \leq \left\lfloor \frac{[x]}{x} \right\rfloor < b^{k+1}$$

انتگرالده برابر است با

$$e(x) = \left\lfloor \log_b \left\lfloor \frac{[x]}{x} \right\rfloor \right\rfloor = \lfloor \log_b (b^{k \cdot abc \dots}) \rfloor = \lfloor k \cdot abc \dots \rfloor = k$$

بنابراین به ازای هر x ای که در نابریهای

$$b^k \leq \left\lfloor \frac{[x]}{x} \right\rfloor < b^{k+1}$$

صدق کند، $e(x) = k$.

حال، y بیش از ۱ واحد از $[y]$ بزرگتر نیست، و در نتیجه اگر $b < [y] \leq a$ ، که در آن a و b عددهایی صحیح اند، آنگاه $b < y \leq a$. در نتیجه نابریهای بالا معادل اند با

$$b^k \leq \frac{[x]}{x} < b^{k+1}$$

با یادآوری این مطلب که به ازای هر x در بازه $(0, 1]$ ، $[x] = 1$ ، درمی یابیم که این شرایط به ازای x هایی که در نابریهای

$$b^k \leq \frac{1}{x} < b^{k+1}$$

صدق می کنند، یعنی x هایی که در بازه

$$\frac{1}{b^k} \geq x > \frac{1}{b^{k+1}}$$

قرار دارند، برقرار است. در نتیجه، با مدّ نظر قرار دادن همه نقاط انتهایی بازه، وقتی که x روی محور و به طرف مبدأ از $\frac{1}{b^k}$ به طرف $\frac{1}{b^{k+1}}$ حرکت می کند، مقادیر $e(x)$ به شکل زیر است:

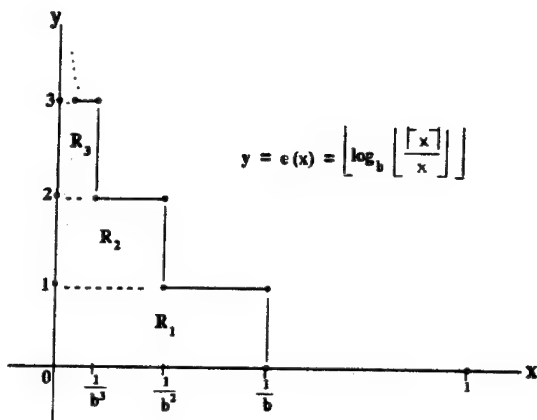
$$\begin{aligned} \text{وقتی که } x \text{ از } 1 \text{ به طرف } \frac{1}{b} \text{ می رود } e(x) &= 0, \\ \text{وقتی که } x \text{ از } \frac{1}{b} \text{ به طرف } \frac{1}{b^2} \text{ می رود } e(x) &= 1, \\ \text{وقتی که } x \text{ از } \frac{1}{b^2} \text{ به طرف } \frac{1}{b^3} \text{ می رود } e(x) &= 2, \\ &\dots \end{aligned}$$

بنابراین $e(x)$ تابعی پله ای است که شکلش در شکل ۸۴ نشان داده شده است.

ساده ترین راه محاسبه انتگرال I که سطح زیر نمودار منحنی $e(x)$ است، افراز بازه مورد بحث به مستطیلهایی مانند R_1, R_2, \dots است که بلندی آنها برابر با واحد و طول قاعده هایشان $\frac{1}{b^3}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b}$ است، و در شکل مشخص شده اند.

بنابراین

$$I = \int_0^1 e(x) dx = \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^3} + \dots$$



شکل ۸۴

که در آن فرایند حدی ناشی از ناپیوستگی در $x = 0$ ، با ادامه دادن سری تا بی‌نهایت جایگزین شده است. در نهایت

$$I = \frac{\frac{1}{b}}{1 - \frac{1}{b}} = \frac{1}{b-1}$$

دو مسأله از المپیاد بین‌المللی، ۱۹۸۷

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۱۰)

مسأله ۱

به ازای هر عدد صحیح مانند n ، $n \geq 3$ ، ثابت کنید مجموعه‌ای متشکل از n نقطه در صفحه وجود دارد به طوری که

(الف) فاصله بین هر دو نقطه از این نقاط عددی گنگ است، و

(ب) هر سه نقطه از این نقاط مثلثی ناتباهیده با مساحت گویا تشکیل می‌دهند.

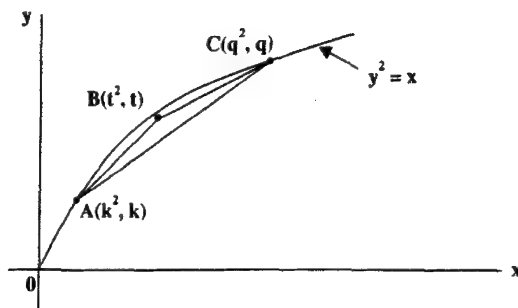
نمی‌دانم که متحنان از نحوه برخورد شرکت‌کنندگان با این مسأله چه تصویری داشته‌اند، اما توجیهم از راه حل خودم این است که راستش را بخواهید در یافتنش بسیار خوش اقبال بوده‌ام.

راه حل

از آنجا که هر سه نقطه از نقاط باید مثلثی ناتباهیده پدید آورند، بدیهی است که هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست قرار ندارند. بنابراین، این احتمال وجود دارد که چنین نقاطی را بتوان روی منحنی شناخته شده‌ای مانند دایره یافت. با وجود این به نظر می‌رسد که نمایش معمول نقاط واقع بر دایره، یعنی $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ، احتمالاً به عبارتهای پیچیده‌ای درباره فاصله‌ها و مساحتها می‌انجامد. هنگام طراحی منحنی با پارامترهای ساده‌تر، سهمی مورد علاقه‌ام، یعنی $y^2 = x$ ، به ذهنم خطور کرد. مشخص کردن نقاط $A(k^2, k)$ ، $B(t^2, t)$ و $C(q, q^2)$ روی این منحنی کار ساده‌ای بود و خوش اقبالی موجب شد که همه چیز به طور شگفت‌آوری به سرعت و به آسانی حل شد.

بدیهی است که

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(k^2 - t^2)^2 + (k - t)^2} \\ &= (k - t) \sqrt{(k + t)^2 + 1} \end{aligned}$$



شکل ۸۵

و سمت راست این برابری به‌ازای عددهای طبیعی و نابرابر k و t مقداری گنگ است $(k+t)^2$ مربع کامل است، و در نتیجه عدد صحیح بعد از آن، $(k+1)^2 + 1$ ، مربع کامل نیست. چون دترمینان

$$D = \begin{vmatrix} k^2 & k & 1 \\ t^2 & t & 1 \\ q^2 & q & 1 \end{vmatrix}$$

اگر q, t و k عددهایی صحیح باشند، عددی صحیح است، مساحت $\triangle ABC$ که دقیقاً برابر با $\frac{1}{4}|D|$ است، همواره گویاست.

بنابراین مجموعه قابل قبولی متشکل از n نقطه مجموعه زیر است

$$\{(1^2, 1), (2^2, 2), (3^2, 3), \dots, (n^2, n)\}$$

مسأله ۲

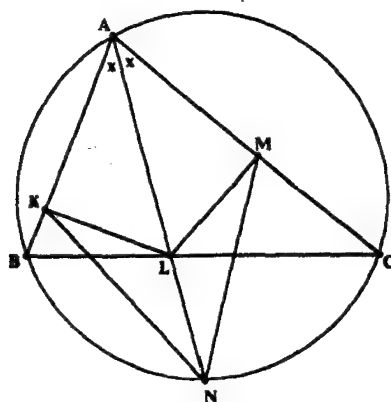
فرض کنید نیمساز زاویه A در مثلث حاده ABC ضلع BC را در L و دایره محیطی مثلث را در N قطع کند. فرض کنید از L عمودهای LK و LM به‌ترتیب بر ضلعهای AB و AC رسم شده‌اند. ثابت کنید مساحت چهارضلعی $AKNM$ و مساحت مثلث ABC یکی است:

$$\text{مساحت } (\triangle ABC) = \text{مساحت } (AKNM)$$

راه‌حل

احتمالاً نخستین مطلبی که توجه ما را به خود جلب می‌کند این است که مثلثهای AKL و AML همنهشت‌اند (به حالت زرض) و در نتیجه*

$$KL = LM$$



شکل ۸۶

چون KL و LM ارتفاعهای دو مثلثی هستند که AL ، $\triangle ABC$ را به آن دو تقسیم کرده است، پس

$$\begin{aligned} \text{مساحت } (\triangle ABC) &= \frac{1}{2} AB \times KL + \frac{1}{2} AC \times LM \\ &= \frac{1}{2} c \times KL + \frac{1}{2} b \times KL \\ &= \frac{1}{2} (c + b) KL \end{aligned}$$

اینک از همنهشتی مثلثها نتیجه می شود $AK = AM$ ، و در نتیجه AL نیمساز زاویه رأس مثلث متساوی الساقین AKM است. بنابراین AL در واقع عمود منصف قاعده KM است و در نتیجه این پاره خط را در وسط آن، Q ، و تحت زاویه قائمه قطع می کند (شکل ۸۷). بنابراین $KQ = QM$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} \text{مساحت } (\triangle AMN) + \text{مساحت } (\triangle AKN) &= \text{مساحت } (\triangle AKNM) \\ &= \frac{1}{2} AN \times KQ + \frac{1}{2} AN \times QM \\ &= AN \times KQ \end{aligned}$$

حال چون زاویه های K و M قائمه اند، پس چهارضلعی $AKLM$ محاطی است و چون LM وتر دایره محیطی آن است،

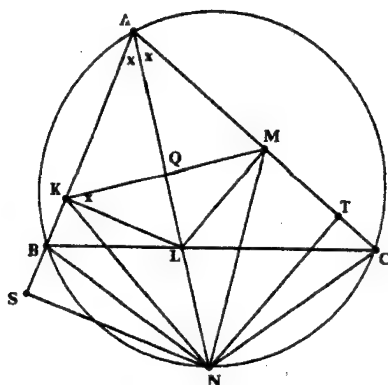
$$\angle LKM = \angle LAM = \frac{1}{2} \angle A = x$$

بنابراین در مثلث قائم الزاویه KLQ ،

$$KQ = KL \cos x$$

و در نتیجه

$$\text{مساحت } (\triangle AKNM) = AN \times KL \cos x$$



شکل ۸۷

می‌خواهیم ثابت کنیم

$$(\triangle ABC) \text{ مساحت} = \frac{1}{2}(c+b)KL = AN \times KL \cos x$$

یعنی

$$b+c = 2AN \cos x$$

مقدار $AN \cos x$ به‌وضوح برابر است با طول ضلع AT از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که با رسم عمود NT بر ضلع AC پدید می‌آید، و نیز برابر است با طول ضلع AS از مثلث قائم‌الزاویه NAS (شکل ۸۷ را ببینید). در نتیجه

$$2AN \cos x = TA + AS$$

می‌خواهیم ثابت کنیم

$$TA + AS = b + c$$

اینک می‌توان نوشت

$$b+c = CA + AB$$

و اگر سمت راست این برابری همان $TA + AS$ باشد، CT باید برابر با BS شود؛ و بر عکس، اگر بتوانیم ثابت کنیم $CT = BS$ نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید. ولی به‌آسانی معلوم می‌شود که $CT = BS$ ، زیرا CT و BS ضلعهای متناظر در مثلثهای همنهشت NCT و NBS هستند:

وترهای NB و NC دو وتر مساوی از دایره محیطی‌اند، زیرا روبه‌رو به زاویه‌هایی برابر در رأس A هستند، و در مثلثهای همنهشت NAT و NAS (زرز)،
 $NT = NS$

مسأله‌ای دربارهٔ تصاعدهای حسابی

(مسألهٔ ۱۱۶۶ (نکراری)، کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۳۲۴، پیشنهاد شده از سوی کنت ویلیامز، دانشگاه کارلتون، آتاوا، کانادا)

برخی از تصاعدهای حسابی از عددهای طبیعی شامل مربعهایی کامل‌اند و برخی چنین نیستند. برای مثال،

$4, 10, 16, 22, \dots$ به‌وضوح شامل ۴ و ۱۶ است، و

$3, 10, 17, 24, \dots$ شامل هیچ مربع کاملی نیست.

ثابت کنید که اگر تصاعد $a, a+d, a+2d, \dots$ شامل مربعی کامل باشد، یکی از جمله‌هایی که مربع کامل است باید پیش از اینکه تصاعد به عدد

$$N = a + 2d\sqrt{a} + d^2$$

برسد ظاهر شود.

راه‌حل

راه‌حل زیر از والتر یانوش از کشور اتریش است.

باید ثابت کنیم که اگر تصاعد موردنظر شامل مربعی کامل مانند k^2 باشد، باید شامل مربعی کامل باشد که از N کوچکتر است. با توجه به اینکه

$$N = a + 2d\sqrt{a} + d^2 = (\sqrt{a} + d)^2$$

باید جمله‌ای مانند x^2 بیابیم که $x^2 < (\sqrt{a} + d)^2$ و یا $x < \sqrt{a} + d$.

فرض کنید جمله‌ای برابر با k^2 داشته باشیم، یعنی به‌ازای n ، $n \geq 0$

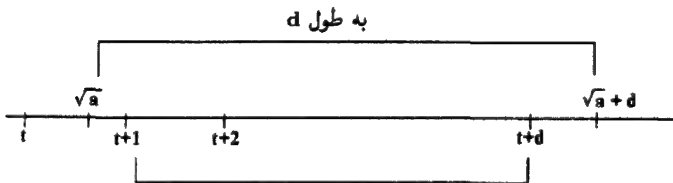
$$a + nd = k^2$$

بدیهی است که در این صورت

$$k^2 \equiv a \pmod{d} \quad (\text{به‌پیمانه } d)$$

اکنون، چون طول بازهٔ $[\sqrt{a}, \sqrt{a} + d]$ و خودش در یک انتها بسته است، باید شامل d طبیعی مانند $t+1, t+2, \dots, t+d$ باشد (اگر \sqrt{a} عددی صحیح باشد، آنگاه $t+1 = \sqrt{a}$). از آنجا که هر d عدد صحیح متوالی مجموعه‌ای کامل از مانده‌ها به‌پیمانهٔ d تشکیل می‌دهند، عدد صحیح k باید با عدد صحیحی مانند x در این بازه هم‌نهشت باشد:

$$x \equiv k \pmod{d} \quad (\text{به‌پیمانه } d)$$



d عدد صحیح متوالی بازه‌ای به طول $d - 1$

شکل ۸۸

بنابراین

$$x^2 \equiv k^2 \equiv a \pmod{d} \quad (\text{به‌پیمانه } d)$$

و در نتیجه به‌ازای m ، $m \geq 0$

$$x^2 = a + nd$$

به‌عبارت دیگر، x^2 جمله‌ای از تصاعد است و چون در بازهٔ $[\sqrt{a}, \sqrt{a} + d]$ قرار دارد،

$$x < \sqrt{a} + d$$

و در نتیجه

$$x^2 < (\sqrt{a} + d)^2 = N$$

در مورد مثالی که آوردیم،

$$3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, \dots$$

$$N = 3 + 14\sqrt{3} + 49 < 77$$

و چون این تصاعد شامل هیچ مربع کاملی کوچکتر از N نیست، پس به‌طور کلی شامل هیچ مربع کاملی نیست.

از ویژگیهای مثلثهایی که زاویه‌ای 30° دارند

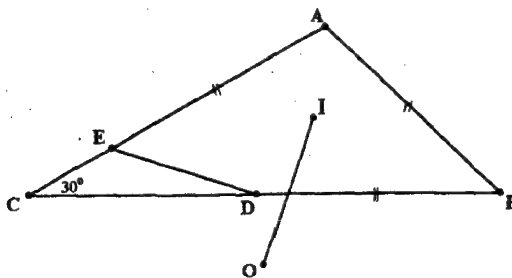
(مسأله ۱۱۰۰، کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۱۶۰)

طبق معمول، فرض کنید I و O به ترتیب مرکز دایره‌های محاطی و محیطی $\triangle ABC$ باشند. فرض کنید $\angle C = 30^\circ$ و به اندازه طول ضلع AB روی هریک از دو ضلع دیگر جدا کرده‌ایم تا نقاط D و E به دست آیند:

$$EA = AB = BD$$

ثابت کنید پاره خط DE برابر با IO و بر آن عمود است.

این مسأله از د. ج. اسمینک از کشور هلند است و برهان زیبایی زیر از هیده توسی فوکاگوا از کشور ژاپن است که کتابش به نام مسائل هندسی معابد ژاپنی که با همکاری دَن پدو نوشته شده است اثر تاریخی مهمی است.



شکل ۸۹

راه حل

فرض کنید AI را امتداد دهیم تا دایره محیطی $\triangle ABC$ را در F قطع کند. چون I مرکز دایره محاطی است، IA نیمساز $\angle A$ است، و چون $\triangle EAB$ متساوی الساقین است، این نیمساز قاعده را در وسط

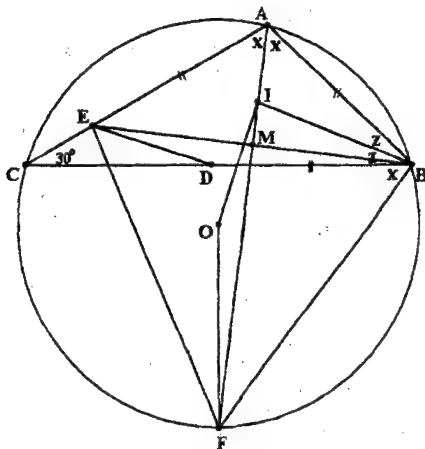
آن، M ، قطع می‌کند و در حقیقت عمود منصف قاعده EB است. در نتیجه نقطه F که بر این عمود منصف واقع است از نقاط E و B به یک فاصله است:

$$EB = FB$$

همچنین $\triangle EFA \equiv \triangle BFA$ (ض.ض.)، و بنابراین $\angle EFA = \angle BFA$ ، و در نتیجه $\angle EFB = 2\angle AFB$ ، ولی $\angle AFB = \angle C$ ، زیرا هر دو مقابل به وتر AB هستند و در نتیجه

$$\angle EFB = 2(30^\circ) = 60^\circ$$

بنابراین در مثلث EFB زاویه بین ضلعهای برابر، EF و FB ، 60° است. بنابراین مثلث EFB متساوی الاضلاع است. در نتیجه $FB = EB$.



شکل ۹۰

اینک به سادگی معلوم می‌شود که $\triangle IBF$ متساوی الساقین است، زیرا هریک از زاویه‌های I و B برابر است با $\frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B$: $\angle CAF = \angle CBF$ ، زیرا هر دو مقابل به وتر CF هستند، و در نتیجه $\angle CBF = \frac{1}{4}A$ ؛ چون IB زاویه B را نصف می‌کند، پس $\angle IBF = \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}A$ ، ولی در $\triangle AIB$ هم زاویه خارجی FIB برابر با $\frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B$ است. بنابراین $FB = FI$ و چون در مثلث متساوی الاضلاع EBF ، $FB = EB$ ، پس

$$FI = BE \quad (۱)$$

اینک با استفاده از این نتیجه ثابت می‌کنیم که مثلثهای FIO و BED همنهشت‌اند، که از آن حکم مورد نظر مسأله به سادگی نتیجه می‌شود. چون AI نیمساز $\angle A$ است، F باید وسط کمان CB باشد و در نتیجه FO بر وتر CB عمود است. اگر به یاد آوریم که IF عمود منصف EB است، معلوم

می‌شود که ضلعهای زاویه‌های $I FO$ و $E BD$ بر یکدیگر عمودند، و در نتیجه این دو زاویه با هم برابرند:

$$\angle OFI = \angle EBD \quad (2)$$

اینک، می‌دانیم که زاویه C نصف زاویه مرکزی مقابل به وتر AB است، و در نتیجه $\angle AOB = 2\angle C = 60^\circ$. چون شعاعهای OA و OB برابرند، پس $\triangle AOB$ متساوی‌الاضلاع است، و نتیجه می‌گیریم که شعاع دایره محیطی، چیزی بجز طول AB نیست. در نتیجه

$$OF = AB = BD \quad (3)$$

بنابراین در مثلثهای OFI و $E BD$ دو ضلع و زاویه بین آنها برابرند (بنابر (۱)، (۲) و (۳))؛ در نتیجه این مثلثها هم‌منشعب‌اند و $IO = ED$.

از این مطلب همچنین نتیجه می‌شود $\angle FIO = \angle BED$. چون ضلعهای IF و EF از این زاویه‌های برابر برهم عمودند، ضلعهای دیگر آنها، IF و EB ، نیز باید برهم عمود باشند، زیرا اگر IF و EB را به ترتیب حول I و E به یک اندازه و در یک جهت (در شکل 90° در جهت ساعتگرد) دوران دهیم تا روی ضلعهای IO و ED قرار گیرند، تعامد حفظ می‌شود.

مسأله‌ای از مسابقات بهاری بلغارستان (کلاس ۱۱)، ۱۹۸۵

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۱۳۸)

اگر

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + \dots + \binom{2n}{2n}$$

ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{1/2n} = 2$$

راه حل

بدیهی است که S_n مجموع دو تا در میان ضریبهای دوجمله‌ای در سری زیر است

$$(1+x)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}x + \binom{2n}{2}x^2 + \dots + \binom{2n}{2n}x^{2n}$$

به ازای $x=1$ ، مجموع همهٔ این ضریبها به دست می‌آید و مسأله این است که چگونه می‌توانیم از دست دوموم اضافی آنها خلاص شویم.

نسبتاً روشن است که چگونه می‌توان سری

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

را «نصف» کرد. از برابریهای

$$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

و

$$f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

به دست می‌آوریم

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = \frac{1}{\sqrt[3]{p}} [f(1) + f(-1)]$$

و

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{1}{\sqrt[3]{p}} [f(1) - f(-1)]$$

ولی روشن نیست که چگونه می‌توان سریها را تثلیث و یا به‌طور کلی به چندین بخش تقسیم کرد. با وجود این، توجه کنید که مقادیر ۱ و -۱ که در فرایند نصف کردن به جای x قرار گرفتند چیزی بجز دو ریشهٔ دوم واحد نیستند. آیا این امکان وجود دارد که سه ریشهٔ سوم واحد، یعنی ۱، ω و ω^2 که در اینجا $\omega = e^{2\pi i/3}$ در تثلیث سری مفید باشند؟ به نظر می‌رسد این‌طور نیست، زیرا دو تا از این ریشه‌ها حتی عددهایی حقیقی نیستند. در هر حال، چون این عددها ریشه‌های معادلهٔ $x^3 - 1 = 0$ هستند، می‌دانیم که

$$\omega^3 = 1, \quad \omega^{3k} = 1, \quad 1 + \omega + \omega^2 = 0$$

اگر به‌طور متوالی مقادیر ۱، ω و ω^2 را به جای x قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$$(1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \dots + \binom{2n}{2k} \times 1 + \binom{2n}{2k+1} \times 1 + \binom{2n}{2k+2} \times 1 + \dots$$

$$(1+\omega)^{2n} = \binom{2n}{0} + \dots + \binom{2n}{2k} \omega^{2k} + \binom{2n}{2k+1} \omega^{2k+1} + \binom{2n}{2k+2} \omega^{2k+2} + \dots$$

$$(1+\omega^2)^{2n} = \binom{2n}{0} + \dots + \binom{2n}{2k} \omega^{2k} + \binom{2n}{2k+1} \omega^{2k+2} + \binom{2n}{2k+2} \omega^{2k+4} \dots$$

با توجه به اینکه

$$\omega^{2k} = \omega^{6k} = 1, \quad \omega^{2k+1} = \omega^{6k+1} = \omega$$

$$\omega^{2k+2} = \omega^{6k+2} = \omega^2, \quad \omega^{2k+4} = \omega$$

ضریبهای $\binom{2n}{2k}$ ، $\binom{2n}{2k+1}$ و $\binom{2n}{2k+2}$ در مجموع این سریها به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$1 + \omega^{2k} + \omega^{6k} = 3, \quad 1 + \omega^{2k+1} + \omega^{6k+2} = 1 + \omega + \omega^2 = 0$$

و

$$1 + \omega^{2k+2} + \omega^{6k+4} = 1 + \omega^2 + \omega = 0$$

در نتیجه مجموع $2^{2n} + (1+\omega)^{2n} + (1+\omega^2)^{2n}$ همان $3S_n$ است و در نتیجه

$$S_n = \frac{1}{3} [2^{2n} + (1+\omega)^{2n} + (1+\omega^2)^{2n}]$$

چون $1 + \omega + \omega^2 = 0$ ، پس $1 + \omega = -\omega^2$ و $1 + \omega^2 = -\omega$ و در نتیجه

$$S_n = \frac{1}{3} [2^{2n} + (-1)^{2n} \omega^{2n} + (-1)^{2n} \omega^{2n}]$$

$$= \frac{1}{3} [2^{2n} + (-1)^{2n} \times 2]$$

$$= \frac{1}{3} [2^{2n} \pm 2]$$

که در آن انتخاب علامتهای + و - به زوج یا فرد بودن n بستگی دارد.
بنابراین در هر صورت

$$\frac{1}{3}(2^{2n} - 2) \leq S_n \leq \frac{1}{3}(2^{2n} + 2)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{2^{2n}}\right) \leq \frac{S_n}{2^{2n}} \leq \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{2^{2n}}\right)$$

و

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2n} \left(1 - \frac{2}{2^{2n}}\right)^{1/2n} \leq \frac{S_n^{1/2n}}{2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2n} \left(1 + \frac{2}{2^{2n}}\right)^{1/2n}$$

اینک، به‌ازای $1 < |x| < 10$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/2n} = 1$ ، و به‌ازای $|x| > 1$ نیز $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/2n} = 1$ ، بنابراین، هنگامی‌که $n \rightarrow \infty$ ، نتیجه می‌گیریم $S_n^{1/2n}/2 = 1$. که در نتیجه $S_n^{1/2n} = 2$.
استدلال بالا را، دربارهٔ تثلیث سری، می‌توان به حالت کلی، تقسیم به چندین بخش، تعمیم داد.
برای دیدن اثبات مشروحی از نتیجه‌ای کلی که در زیر آمده است، گوهرهای ریاضی، III، جلد ۹ از سری دلچیانی، MAA، ۱۹۸۵، صفحه ۲۱۰ را ببینید.

دستور کلی

فرض کنید

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots$$

سری متناهی یا نامتناهی باشد. در این صورت مجموع $1 - n$ تا در میان جمله‌هایی که از جمله $f_j x^j$ ، $j \leq n - 1$ ، آغاز می‌شوند، از دستور

$$S(n, j) = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \omega^{-jt} f(\omega^t x)$$

به‌دست می‌آید که در آن $\omega = e^{2\pi i/n}$ ، یعنی ω ریشه‌ای n ام از واحد است.

مسأله‌ای استفاده نشده از المپیاد بین‌المللی؛ از انگلستان

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۷۷، راه‌حل از آگ بوندسن^۱، مدرسه سلطنتی مطالعات آموزشی دانمارک، کپنهاگ)

ثابت کنید حاصل ضرب پنج عدد طبیعی متوالی هیچ‌گاه مربع کامل نمی‌شود.

راه‌حل

از آنجا که عددهای زوج و فرد یکی در میان در دنباله اعداد صحیح آمده‌اند، در هر رشته‌ای متشکل از پنج عدد طبیعی متوالی، باید دست‌کم دو عدد زوج وجود داشته باشد، و ممکن است سه عدد زوج وجود داشته باشد. به همین ترتیب، هر رشته‌ای از این نوع باید دست‌کم شامل یک مضرب سه باشد، و ممکن است شامل دو تا مضرب سه باشد. در نهایت، این دنباله باید شامل دقیقاً یک مضرب ۵ باشد، و به‌ازای هر عدد اول بزرگتر از ۵ مطمئناً این رشته بیش از یک مضرب از آن را شامل نیست. هر عدد طبیعی مانند n را می‌توان به شکل منحصر به فردی به اعداد اول تجزیه کرد

$$n = 2^r 3^s 5^t 7^q \dots$$

از آنجا که فقط یکی از پنج عدد صحیح در رشته مورد بحث بر ۵ بخش‌پذیر است، حاصل ضرب این اعداد مربع کامل نمی‌شود، مگر اینکه نمای عدد اول ۵، در تجزیه عدد صحیحی که بر آن بخش‌پذیر است، عددی زوج باشد. همین مطلب درباره هر عدد اول بزرگتر از ۵ نیز درست است. چون تعداد اعضای از این رشته که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیرند دست‌کم ۱ است، نمای ۲ و ۳ در هریک از اعضا هم ممکن است زوج باشد هم ممکن است فرد. در نتیجه، اگر بخواهیم حاصل ضرب پنج عدد صحیح موجود در این رشته مربع کامل باشد، باید تجزیه هریک از این اعداد صحیح به عاملهای اول به صورت زیر باشد

$$n = 2^r 3^s 5^{2a} 7^{2b} \dots$$

که در آن r و s هم ممکن است زوج باشند هم ممکن است فرد، ولی بقیه نماها باید زوج باشد. در نتیجه تنها عددهای صحیحی می‌توانند در این رشته وارد شوند که به یکی از چهار صورت زیر باشند:
الف) r و s زوج باشند؛

$$n = 2^{2k} 3^{2m} 5^{2a} 7^{2b} \dots = (2^k 3^m 5^a 7^b \dots)^2$$

یعنی n مربعی کامل است.

ب) r فرد و s زوج باشد؛

$$n = 2^{2k+1} 3^{2m} 5^{2a} \dots = 2(2^k 3^m 5^a \dots)^2$$

یعنی n دو برابر مربعی کامل است.

ج) r زوج و s فرد باشد؛

$$n = 2^{2k} 3^{2m+1} 5^{2a} \dots = 3(2^k 3^m 5^a \dots)^2$$

یعنی n سه برابر مربعی کامل است.

د) r و s فرد باشند؛

$$n = 2^{2k+1} 3^{2m+1} 5^{2a} \dots = 2 \times 3(2^k 3^m 5^a \dots)^2$$

یعنی n شش برابر مربعی کامل است.

چون فقط چهار نوع عدد در دست داریم، بنابر اصل لانه‌کبوتری دو تا از پنج تا عدد صحیح موجود در این رشته باید از یک نوع باشند. حال مربعهای کامل چنین‌اند

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots,$$

در نتیجه دو برابر مربعی کامل باید یکی از عددهای ۲، ۸، ۱۸، ۳۲، ... باشد. ولی تفاضل دو عدد از این نوع دست‌کم برابر با ۶ است و در نتیجه هیچ دو تایی از آنها در رشته‌ای از عددهایی متوالی به طول ۵ جا نمی‌گیرند. به همین ترتیب، هیچ‌گاه دو عدد از نوع (ج) یا (د) نمی‌توانند در رشته‌ای ظاهر شوند:

$$3, 12, 27, 48, \dots$$

سه برابر مربعهای کامل:

$$6, 24, 54, 96, \dots$$

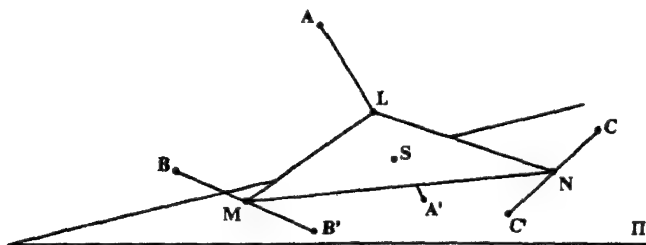
شش برابر مربعهای کامل:

بنابراین، اگر رشته‌ای شامل دو عدد صحیح از یک نوع باشد، آن دو عدد باید از نوع (الف) باشند؛ به عبارت دیگر، هر دو باید مربع کامل باشند. ولی تنها رشته‌ای به طول پنج که شامل دو مربع کامل است رشته ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ است، و چون حاصل ضرب اعضای این رشته ۱۲۰ است، که مربع کامل نیست، در نتیجه هیچ رشته‌ای وجود ندارد که همه شرایط موردنظرمان را داشته باشد.

مسأله‌ای از المپیاد رومانی

فرض کنید A, B و C سه نقطه متمایز باشند که در یک طرف صفحه‌ای مانند π واقع‌اند. نقاط دلخواه A', B', C' را روی صفحه π انتخاب می‌کنیم و وسطهای AA', BB' و CC' را L, M و N و محل برخورد میانه‌های مثلث LMN را S می‌نامیم.

با تغییر مکان نقاط A', B', C' در π ، نقطه S نیز حرکت می‌کند. در صورتی که نقاط A', B' و C' همهٔ یک‌رندیهای ۳ نقطه‌ای ممکن را در صفحه π بگیرند، مکان هندسی S چیست؟ (انطباق دو نقطه از A', B' و C' یا انطباق هر سه آنها برهم مجاز است.)



شکل ۹۱

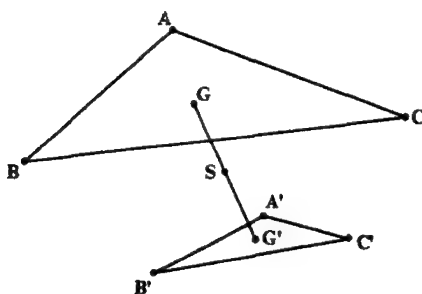
دانیل پدو [۱] این مسأله از رومانی را به‌عنوان مثالی از نوع مسائل هندسی آورده است که کشورهای اروپای شرقی در اوائل دههٔ ۱۹۶۰ برای مسابقات ریاضی دبیرستانی خود مناسب می‌دانستند. راه‌حل زیر، که به‌نظر وی احتمالاً روشی است که دانش‌آموزان انگلیسی برای حل این مسأله در پیش می‌گیرند، بسیار زیرکانه و زیباست.

راه‌حل

اگر در هریک از نقاط A, B, C و A', B', C' ذره‌ای به‌جرم واحد قرار دهیم، سیستم حاصل معادل

است با اینکه در هریک از نقاط L, M و ذره‌ای به جرم ۲ بگذاریم و در نتیجه معادل است با اینکه ذره‌ای به جرم ۶ در S بگذاریم.

با وجود این، مرکز ثقل، S ، را می‌توان به روش دیگری نیز مشخص کرد. سه جرم واقع در نقاط A, B و C ، با جرمی به اندازه ۳ واحد در نقطه G ، یعنی محل برخورد میانه‌های $\triangle ABC$ ، معادل‌اند. از آنجا که جرم‌های واقع در G و G' مساوی‌اند، مرکز ثقل کل سیستم همان وسط GG' است.



شکل ۹۲

اینک، همین‌طور که نقاط A', B' و C' روی π حرکت می‌کنند، نقاط A, B, C ، و مهم‌تر از همه، G ثابت می‌مانند. همچنین به سادگی قانع می‌شویم که با تغییر مکان نقاط A', B' و C' ، همه وضعیتهای ممکن در π را اختیار می‌کند (در حقیقت، می‌توانیم ابتدا G' را مشخص کنیم و سپس A', B' و C' را به‌طور مناسب انتخاب کنیم). بنابراین مکان هندسی S از وسط همه پاره‌خطهایی مانند GG' تشکیل شده است که در اینجا G' روی صفحه π تغییر می‌کند. در نتیجه مکان هندسی مورد نظر تصویر صفحه π تحت تجانس به مرکز G و نسبت $\frac{1}{4}$ است. این مکان صفحه‌ای مانند π' است که با صفحه π موازی است و از نقطه G و صفحه π به یک فاصله است.

مرجع

- [1] Daniel Pedoe, The Mathematical Tripos and Mathematical Education in Great Britain, *American Mathematical Monthly*, 1964, 666-670.

مسأله‌ای از المپیاد بلغارستان، ۱۹۸۴

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۲۸۸)

همه جوابهای صحیح و نامنفی معادله زیر را به دست آورید

$$5^x \times 7^y + 4 = 3^z$$

راه حل

راه حل استاندارد زیر از جان موروی ساکن شهر دالاس در ایالت تگزاس است.
از آنجا که طرف چپ معادله از ۳ بیشتر است، مقدار z دست کم باید ۲ باشد. در نتیجه هر دو طرف معادله بر ۳ بخش پذیر است و به پیمانه ۳،

$$5^x \times 7^y + 4 \equiv (-1)^x \times 1^y + 1 \equiv 0$$

در نتیجه x باید عددی فرد باشد. پس x صفر نیست. اگر معادله را به پیمانه ۵ در نظر بگیریم، می توان نوشت

$$5^x \times 7^y + 4 \equiv 4 \equiv 3^z$$

اینک، اگر باقیمانده توانهای ۳ را به پیمانه ۵ حساب کنیم، دنباله باقیمانده‌های

$$\{3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, 3, \dots\}$$

به دست می‌آید که $(3, 4, 2, 1)$ در آن تکراری است. برای اینکه (به پیمانه ۵) $3^z \equiv 4$ ، باید $z \equiv 2$ ؛ به عبارت دیگر، z باید یکی از اعداد زوج در تصاعد زیر باشد.

$$\{2, 6, 10, 14, 18, \dots\}$$

اگر $z = 2$ ، معادله به شکل زیر می‌شود

$$5^x \times 7^y + 4 = 9$$

و در نتیجه

$$5^x \times 7^y = 5$$

که از آن جواب $(x, y, z) = (1, 0, 2)$ به دست می‌آید.اگر $z = 2k > 2$ ، آنگاه

$$5^x \times 7^y + 4 = 3^{2k}$$

و

$$5^x \times 7^y = 3^{2k} - 4 = (3^k - 2)(3^k + 2), \quad k > 1$$

از آنجا که عاملهای طرف راست فقط ۴ واحد اختلاف دارند، هردو باهم بر ۵ یا بر ۷ بخش پذیر نیستند. همچنین اگر هر دو عدد ۵ و ۷، یکی از عاملها را بشمارند، عامل دیگر باید ۱ باشد، و چون این عامل باید عامل کوچکتر باشد، پس $2 = 3^k - 1$ ، و در نتیجه $k = 1$ که تناقض است.

در نتیجه 5^x باید یکی از عاملها را بشمارد و 7^y دیگری را. در حقیقت، چون عاملهای دیگری غیر از اینها وجود ندارد، 5^x باید یکی از این عاملها باشد و 7^y عامل دیگر. در نتیجه باید توانی از ۵ با توانی از ۷ دقیقاً ۴ واحد اختلاف داشته باشد. ولی به آسانی معلوم می‌شود که هیچگاه این اتفاق رخ نمی‌دهد و در نتیجه جواب دیگری وجود ندارد.

از آنجا که 5^x با یکی از عاملها برابر است، به هر حال،

$$5^x \geq 3^k - 2 \geq 3^2 - 2 = 7$$

(به خاطر داشته باشید که $k > 1$). در نتیجه $x \geq 2$. می‌دانیم که هر توانی از ۵، بجز اولی، به رقمهای ۲۵ ختم می‌شود. در نتیجه، توان مناسبی از ۷ باید به رقمهای ۲۹ یا ۲۱ ختم شود. ولی توانهای ۷، به رقمهای ۰۷، ۴۹، ۴۳ و یا ۰۱ ختم می‌شوند.

دو مسأله از اردوش

مدتها پیش پی بردم که اثبات مطلبی که از نظر پال اردوش بدیهی است ممکن است از نظر من مستلزم تلاشی خسته کننده باشد. حتی برخی از مسائل او که ظاهراً ساده به نظر می رسند، غالباً به طور فریبنده ای عمیق و زیرکانه اند. به هر حال این مسائل همواره جالب توجه اند و اغلب مربوط به ویژگیهای حیرت انگیزند. مسأله زیر یکی از مسائل اوست که در سال ۱۹۵۰ در ماهنامه ریاضی امریکا (مسأله ۴۳۳۰، صفحه ۴۹۳) چاپ شده است.

مسأله ۱

ثابت کنید هر دنباله نامتناهی مانند S از اعداد طبیعی یا

- الف) زیر دنباله ای نامتناهی دارد که در هر جفت از جمله های آن هیچ کدام دیگری را نمی شمارد؛ و یا
ب) زیر دنباله ای نامتناهی دارد که در هر جفت از جمله های آن یکی دیگر را می شمارد.

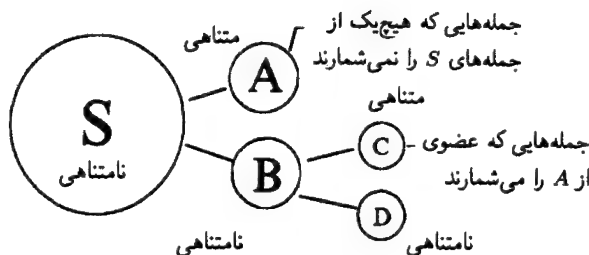
راه حل

راه حل زیر از ر. س. لیمان (از دانشگاه استنفورد) است.

فرض کنید S را به دو زیر مجموعه A و B افراز کرده ایم، به این ترتیب که همه جمله هایی را که هیچ یک از جمله های دیگر S را نمی شمارند در A گذاشته ایم. اگر A مجموعه ای نامتناهی باشد، آنگاه (الف) برقرار است و حکم مسأله ثابت می شود.

فرض کنید A متناهی باشد. در این حالت مجموعه متمم آن، B ، باید نامتناهی باشد (شکل ۹۳ را ببینید). حال، باز هم ممکن است عددهای ناخواسته ای در مجموعه B وجود داشته باشند. همه جمله های B را که عضوی از A را می شمارند، به زیر مجموعه ای مانند C منتقل می کنیم (چون این جمله ها مقسوم علیه عضوی دیگرند، واجد شرایط اعضای مجموعه A نیستند و در نتیجه در B

قرار دارند). چون A متناهی است، تعداد مقسوم‌علیه‌های اعضای آن نیز متناهی است، و بنابراین C نیز زیرمجموعه‌ای متناهی خواهد بود که ممکن است تهی باشد. بنابراین زیرمجموعه متتم آن، $D = B - C$ ، باید نامتناهی باشد



شکل ۹۳

اینک که خود را از دست مقسوم‌علیه‌های A آزاد کردیم، عدد صحیحی مانند k در D در نظر بگیرید. چون k در A نیست، باید یکی از جمله‌های S مانند t را بشمارد. جمله t عضوی از A نیست، زیرا در غیر این صورت k ، مقسوم‌علیه آن، باید در C باشد و در نتیجه در D نیست. همچنین اگر t در C باشد، باید عضوی از A مانند q را بشمارد و در نتیجه k هم باید q را بشمارد زیرا مقسوم‌علیه t است. در نتیجه باز هم k در C است و در D نیست. بنابراین هر عضو از D مانند k باید عضو دیگری از D مانند t را بشمارد. بنابراین به‌سادگی می‌توانیم دنباله‌ای نامتناهی مانند T بسازیم که در ویژگی (ب) صدق کند، یعنی اینک در هر جفت از جمله‌های آن یکی دیگری را بشمارد.

عضو دلخواهی از D مانند k_1 انتخاب و فرض کنید k_2 عضوی از D و مضربی از k_1 باشد. به همین ترتیب فرض کنید k_3 عضوی از D و مضربی از k_2 باشد، و این کار را به‌طور نامحدودی ادامه دهید. چون $k_1 | k_2$ و $k_2 | k_3$ ، نتیجه می‌گیریم $k_1 | k_3$. از آنجا که $k_2 | k_3$ ، پس $k_1 | k_4$ ، و الی آخر. به این ترتیب معلوم می‌شود که k_1 هر جمله بعد از خودش در T را می‌شمارد. ولی بدیهی است که از همین استدلال نتیجه مشابهی در مورد هر k_i ای در T به‌دست می‌آید. در نتیجه در هر جفت از جمله‌ها مانند (k_i, k_j) ، همواره جمله قبلی جمله بعدی را می‌شمارد.

مسأله ۲

(این مسأله مسأله ۱۱۱۸ (با تجدیدنظر) از مجله کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۱۹۳ است که طراحی و راه‌حل آن از پال اردوش، عضو آکادمی علوم مجارستان، است.)

فرض کنید $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ دنباله‌ای نامتناهی از اعداد طبیعی باشد به‌طوری‌که فاصله

موجود بین جمله‌های متوالی آن به‌طور نامحدودی بزرگ شود (ممکن است این فاصله‌ها به‌طور یکنوا بزرگ نشوند؛ به عبارت دیگر، ممکن است فاصله‌ها قبل از اینکه بزرگ شوند در جایی کوچکتر شوند، ولی نهایتاً از هر کرانی فرا می‌روند). تعیین کنید که چگونه می‌توان دنباله نامتناهی دیگری مانند

$$b_1 < b_2 < b_3 < \dots$$

از اعداد طبیعی با این ویژگی ساخت که مجموع اعضای هیچ‌یک از زیرمجموعه‌های متناهی از b_i برابر با هیچ‌یک از a_i ها نباشد.

راه حل

می‌خواهیم دنباله‌ای مانند $\{b_i\}$ بیابیم که مجموع عضوهای هریک از زیردنباله‌های متناهی آن بین a_i ها قرار داشته باشد و با هیچ a_i ای برابر نباشد. برای انتخاب b_1 هر عدد طبیعی که با هیچ‌یک از a_i ها برابر نباشد مناسب است (چون $a_{i+1} - a_i$ ها به تدریج بزرگ می‌شوند، جمله‌های بعد از هر a_i همواره اعدادی صحیح و متوالی نیستند و بنابراین فاصله‌های بزرگ زیادی وجود دارد که می‌توانیم b_1 را از آنها انتخاب کنیم). آنچه می‌خواهیم روشی کلی برای بزرگتر کردن دنباله b ها است به‌طوری‌که شرط اساسی در مورد مجموعه‌ها حفظ شود.

فرض کنید توانسته‌ایم دنباله $b_1 < b_2 < \dots < b_k$ را با موفقیت مشخص کنیم؛ به عبارت دیگر، مجموع اعضای هر یک از زیرمجموعه‌های این دنباله عددی بین a_i ها است. مجموع k جمله این دنباله برابر است با

$$S = b_1 + b_2 + \dots + b_k$$

و عدد S هر قدر که بزرگ باشد، $(a_{i+1} - a_i)$ ای وجود دارد که از $S + 1$ بزرگتر است؛ به ازای n ای،

$$a_{n+1} - a_n > S + 1$$

و در نتیجه

$$a_{n+1} > (a_n + 1) + S > a_n$$

در این صورت ثابت می‌کنیم که با فرض اینکه

$$b_{k+1} = a_n + 1$$

می‌توانیم با اطمینان رشته b ها را بزرگتر کنیم.

بدیهی است که این مقدار، b_{k+1} ، بین a_n و a_{n+1} قرار دارد:

$$a_n < a_n + 1 = b_{k+1} < b_{k+1} + S = (a_n + 1) + S < a_{n+1}$$

و مجموع اعضای هر زیرمجموعه‌ای از $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ را که به b_{k+1} بیفزاییم، مجموع حاصل به a_{n+1} نخواهد رسید، زیرا

$$a_n < b_{k+1} + S < a_{n+1}$$

یعنی

$$a_n < b_{k+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_k < a_{n+1}$$

بنابراین با اضافه کردن b_{k+1} به b ها، به این روش، اطمینان داریم که مجموع اعضای هریک از زیرمجموعه‌های جدید b ها (که برای تازه بودن باید شامل b_{k+1} باشد) بین a ها قرار دارد و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

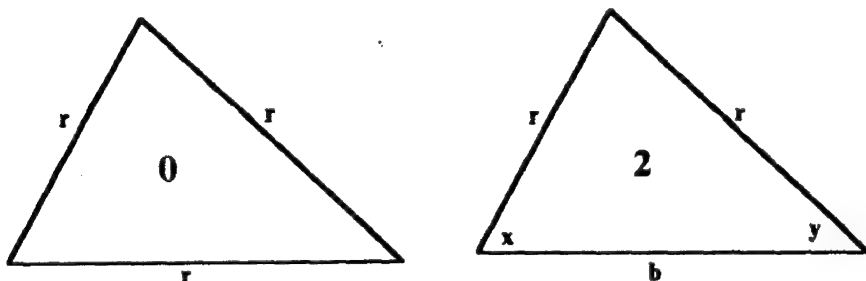
مسأله‌ای از المپیاد بلغارستان، ۱۹۸۵

(کروس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۵، ۳۹)

فرض کنید P_1, P_2, \dots, P_7 و P_7 هفت نقطه در فضا باشند به طوری که هیچ چهار نقطه‌ای از آنها هم‌صفحه نباشند، و فرض کنید هریک از $21 = \binom{7}{2}$ پاره‌خط مانند $P_i P_j$ را با یکی از رنگهای قرمز و آبی رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید نحوه رنگ‌آمیزی هرطور که باشد دو مثلث تک‌رنگ تشکیل می‌شود که هیچ ضلع مشترکی ندارند.

راه‌حل

در اینجا فرصتی طلایی به دست آورده‌ایم تا بتوانیم روش استانداردای را ذکر کنیم که در آن از مفهوم «زاویه‌های مخلوط»، یعنی زاویه‌هایی که از هر رنگ ضلعی به همان رنگ دارند، استفاده شده است. بدیهی است که در مثلثهای تک‌رنگ تعداد زاویه‌های مخلوط برابر با صفر و در بقیه مثلثها این تعداد برابر با ۲ است. از آنجا که در بین نقاط موردنظر هیچ چهار نقطه‌ای هم‌صفحه نیستند، هیچ دو مثلثی زاویه‌ای مشترک ندارند. بنابراین تعداد مثلثهای «مخلوط» برابر با نصف تعداد زاویه‌های مخلوط است. ولی به سادگی می‌توانیم کران بالایی برای تعداد زاویه‌های مخلوط بیابیم.



از هر نقطه مانند P_i ، ۶ پاره خط به بقیه P_j ها رسم شده است و تنها راههای ممکن برای تقسیم رنگها بین آنها اینهاست:

$$(6, 0) \text{ (یعنی هر ۶ تا از یک رنگ باشند و هیچ کدام از رنگ دوم نباشد)}, \\ (5, 1), (4, 2) \text{ و } (3, 3).$$

از آنجا که در هر نقطه هر پاره خط قرمز با هر پاره خط آبی زاویه‌ای مخلوط می‌سازد، تعداد زاویه‌های مخلوط در هر نقطه برابر با یکی از عددهای زیر است:

$$6 \times 0 = 0, \quad 5 \times 1 = 5, \quad 4 \times 2 = 8, \quad 3 \times 3 = 9$$

بنابراین در هیچ P_i ای بیش از ۹ زاویه مخلوط وجود ندارد، و در نتیجه تعداد کل زاویه‌های مخلوط در تمام پیکربندی از $6 \times 9 = 54$ بیشتر نیست. بنابراین تعداد مثلثهای مخلوط از ۳۱ بیشتر نیست.

از طرفی، این هفت نقطه روی هم $35 = \binom{7}{2}$ مثلث می‌سازند و در نتیجه دست کم چهارتا از آنها باید تکرنگ باشند (در حالت کلی تعداد مثلثهای تکرنگی که با n نقطه مشخص می‌شوند دست کم برابر است با

$$\binom{n}{3} - \left[\frac{n}{4} \left[\binom{n-1}{2} \right] \right]$$

که در آن [] نشانه تابع جزء صحیح است. برای دیدن برهان این مطلب، مقاله «گرافهای رنگی» نوشته هارولد دوروارت و دن فینک‌باینر را در کتاب «گزیده‌های ریاضی»، جلد ۴ از سری کتابهای ریاضی دُلچیان، (MAA، ۱۹۷۹، صفحه‌های ۷ و ۸، ببینید).

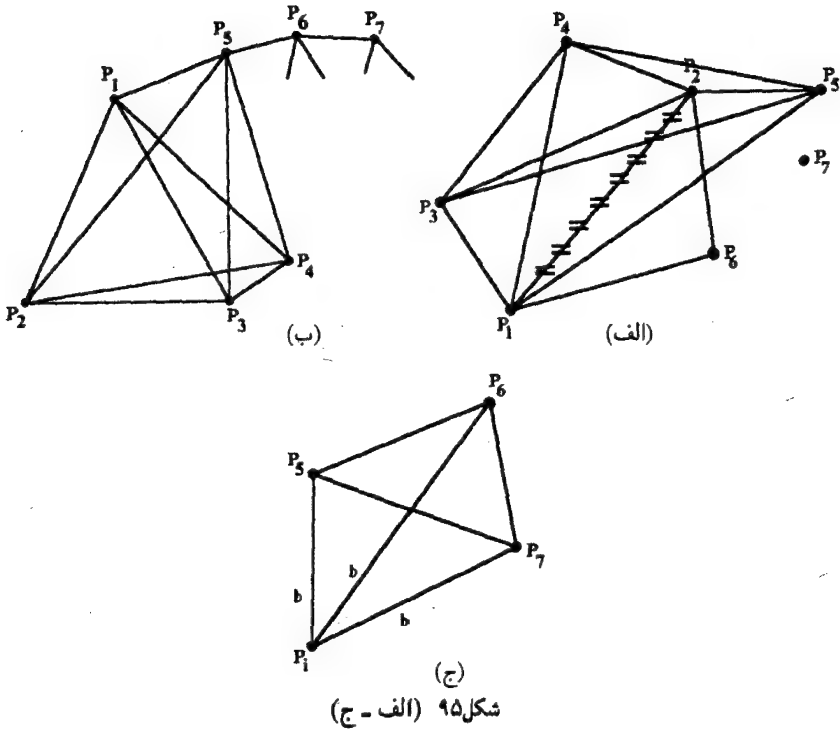
اینگ، مجموعه‌ای از چهار مثلث تکرنگ در نظر بگیرید. اگر رنگ دو تا از این مثلثها متفاوت باشد، چون ضلع مشترکی ندارند، حکم مسأله ثابت می‌شود. بنابراین فرض کنید هر چهار مثلث همرنگ، مثلاً قرمز، باشند. باز هم اگر دو مثلث از آنها ضلع مشترکی نداشته باشند، حکم ثابت می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم هر جفت از این مثلثها ضلعی مشترک داشته باشند. در این حالت، این مثلثها فقط به دو روش ممکن است کنار هم قرار گیرند: یا

(الف) همه آنها در یک ضلع، مانند $P_1 P_2 P_3 P_4$ ، به یکدیگر لولا شده باشند؛ و یا

(ب) چهار وجه چهاروجهی مانند $P_1 P_2 P_3 P_4$ باشند.

در هر صورت، ثابت می‌کنیم که باز هم باید دو مثلث تکرنگ در پیکربندی وجود داشته باشند که هیچ ضلع مشترکی ندارند.

با توجه به شکل ۹۵ (الف)، فوراً معلوم می‌شود که اگر ضلع $P_1 P_2$ میان هر چهار مثلث مشترک باشد، ضلعی قرمز از $\Delta P_1 P_2 P_3 P_4$ با دو ضلع قرمز با رأس مشترک P_1 مثلثی می‌سازد که تماماً قرمز است، و در غیر این صورت $\Delta P_1 P_2 P_3 P_4$ تماماً آبی است. بنابراین، در هر صورت مثلث تکرنگی وجود دارد که هیچ ضلع مشترکی با $\Delta P_1 P_2 P_3 P_4$ ندارد.



اگر چهار مثلث قرمز وجه‌های چهاروجهی $P_1P_2P_3P_4$ باشند (شکل ۹۵ (ب) را ببینید)، می‌توانیم مانند زیر استدلال کنیم. اگر دو تا از یال‌هایی که P_5 را به رأس‌های چهاروجهی وصل می‌کنند قرمز باشند، مثلث تماماً قرمز دیگری حاصل می‌شود که علی‌رغم اینکه ضلع مشترکی با دو وجه چهارضلعی دارد، با دو وجه دیگر چهارضلعی ضلع مشترکی ندارد. به این ترتیب مطلب مورد نظر ثابت می‌شود. همین مطلب در مورد یال‌های مجاور به رأس‌های P_6 و P_7 نیز درست است، و بنابراین اگر از هریک از نقاط P_5 ، P_6 و P_7 بیش از یک یال قرمز به چهاروجهی وصل شده باشد حکم ثابت می‌شود. در نهایت، فرض کنید از هیچ‌کدام از نقاط P_5 ، P_6 و P_7 بیش از یک ضلع قرمز به چهاروجهی وصل نشده باشد. در این صورت رأسی از چهاروجهی، مانند P_1 ، باید به هریک از سه رأس P_5 ، P_6 و P_7 از طریق ضلعی آبی متصل باشد. بنابراین، با توجه به شکل ۹۵ (ج)، معلوم می‌شود که یا مثلث $P_5P_6P_7$ مثلثی تکرنگ و قرمز است و یا مثلثی تکرنگ و آبی در رأس P_1 وجود دارد، و به این ترتیب استدلال تمام می‌شود.

مسأله‌ای از مسابقه‌های چین

اگر پال اردوش نتواند مسأله‌ای را در یکی از زمینه‌های تخصصی‌اش حل کند، قریب به یقین این مسأله بسیار دشوار است. متأسفانه اردوش همواره در دسترس نیست تا اینکه دربارهٔ برآورد میزان دشواری مسأله‌ای که به تنهایی قادر به حل آن نیستید به شما کمک کند. هنگامی که حل مسأله‌ای فراتر از توان ماست به آسانی نمی‌توان میزان دشواری این مسأله را تعیین کرد. به گمانم در این گفتهٔ قدیمی که «هرکاری که از عهده‌اش برآیید، آسان، و در غیر این صورت دشوار است» صداقت موج می‌زند.

من گاه و بی‌گاه و هر بار مدت زمان کوتاهی روی مسألهٔ زیر کار می‌کردم. کم‌کم داشتم نگران می‌شدم که نکند هرگز راه‌حل را پیدا نکنم که بالاخره روزی به‌طور ناگهانی مسأله حل شد. اکنون که این مسأله به‌طور کامل حل شده است نمی‌توانم تصور کنم که به چه دلیل حل کردنش اینقدر طول کشیده است. مطمئناً منصفانه نیست که آن را مسأله‌ای دشوار بدانیم، زیرا راه‌حل آن تا حد قابل قبولی طبیعی و سراسر است. این مسأله مربوط به مسابقه‌ای است که در اوایل دههٔ ۱۹۶۰ در کشور چین برگزار شده است؛ به عقیدهٔ من مخاطبان این مسابقه ردهٔ خاصی از دانش‌آموزان دبیرستانی بوده‌اند.

مسأله

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}]$$

که در آن $[x]$ نشانهٔ بزرگترین عدد صحیحی است که از x کوچکتر یا با آن مساوی است.

راه‌حل

بدیهی است که

$$n = \sqrt{n \times n} < \sqrt{n(n+1)} < \sqrt{(n+1)^2} < n+1$$

و اگر طرفین نابرابری را دو برابر کنیم،

$$2n < 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+2 \quad (۱)$$

همچنین

$$2\sqrt{n(n+1)} = (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 - (2n+1)$$

بنابراین از (۱) نتیجه می‌شود

$$2n < (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 - (2n+1) < 2n+2$$

با افزودن $2n+1$ به طرفهای نابرابریهای بالا به دست می‌آوریم

$$4n+1 < (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 < 4n+3$$

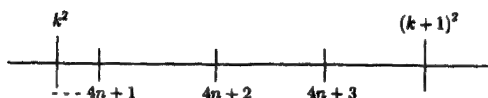
و در نتیجه

$$\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+3} \quad (۲)$$

حال، $4n+1$ یا خودش مربع کامل است و یا بین جفتی مربع کامل متوالی قرار دارد؛ به عبارت

دیگر، به ازای عدد صحیحی مانند k

$$k^2 \leq 4n+1 < (k+1)^2$$



اینک بیایید روی عددهای صحیح از k^2 به طرف $(k+1)^2$ برویم. پیش از اینکه به $(k+1)^2$ برسیم، باید از $4n+1$ بگذریم (البته به شرط اینکه از خود $4n+1$ حرکت را شروع نکرده باشیم) و بلافاصله پس از آن، به عددهای $4n+2$ و $4n+3$ می‌رسیم. ولی هنوز نتوانسته‌ایم به مقصد، یعنی $(k+1)^2$ ، برسیم زیرا هیچ مربع کاملی به‌یمنانهٔ ۴ همنهشت ۲ یا ۳ نیست. به عبارت دیگر همهٔ این اعداد باید بین k^2 و $(k+1)^2$ باشند:

$$k^2 \leq 4n+1 < 4n+2 < 4n+3 < (k+1)^2$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$k \leq \sqrt{4n+1} < \sqrt{4n+2} < \sqrt{4n+3} < k+1$$

از آنجا که (بنابر (۲)) $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ بین $\sqrt{4n+1}$ و $\sqrt{4n+3}$ قرار دارد، پس هر چهار عدد $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ ، $\sqrt{4n+1}$ ، $\sqrt{4n+2}$ ، $\sqrt{4n+3}$ در بازهٔ نیم‌بستهٔ $[k, k+1]$ قرار دارند، و در نتیجه جزء صحیح همهٔ آنها برابر با k است.

مسأله‌ای هندسی از معابد ژاپنی

به دلیل سیاست انزواطلبانه ژاپن و عدم امکان ارتباط ریاضیدانان آنها با ریاضیدانان غربی، ریاضیات ژاپنی در بخش عمده‌ای از دوران ادو (۱۶۰۳ تا ۱۸۶۷) کاملاً خودساخته بوده است. به همین دلیل، مردم هر طبقه‌ای از جامعه، از کشاورز گرفته تا سامورایی، به هندسه ترکیبی علاقه‌مند بوده و به اکتشافات جالب توجهی دست یافته‌اند. بنابر رسومات آن زمان، این اکتشافات گرانها را روی لوحه‌هایی چوبی حک می‌کردند و آنها را در اطراف زیارتگاهها و معابد خود می‌آویختند. متأسفانه ژاپن سرزمین زمین‌لرزه‌ها و طوفانهای توأم با رعد و برق است و طی سالیان، بسیاری از این گنجینه‌ها بر اثر آتش‌سوزی از میان رفته‌اند. با وجود این، بقایای زیادی از این آثار به جا مانده است و گزیده‌ای متشکل از ۲۵۰ مسأله حیرت‌انگیز از این مجموعه را هیده‌توسی فوکاگاوا با همکاری هندسه‌دان بزرگ امریکایی، دن پدو، در کتابی به زبان انگلیسی جمع‌آوری کرده است. مسأله زیر یکی از مسائل این کتاب است، ولی راه‌حلی که در اینجا آورده‌ایم مربوط به ارائه‌دهندگان آن در مجله کروکس ماتماتیکوروم است و با راه‌حلی که در خود کتاب آمده متفاوت است.

مسأله ۱۱۲۱

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۱۹۹۴)

X نقطه‌ای روی وتر L از دایره مفروض C است و دایره‌های A و B در دو طرف مخالف L طوری رسم شده‌اند که بر دایره C و نیز بر وتر L در نقطه X مماس‌اند (شکل ۹۶ را ببینید). ثابت کنید محل نقطه X هر جایی که روی L باشد، نسبت اندازه‌های A و B همواره مقدار ثابتی است؛ به عبارت دیگر

$$\frac{\text{شعاع } A}{\text{شعاع } B} = \frac{a}{b} = \text{مقداری ثابت} (= \frac{\text{شعاع } D}{\text{شعاع } E} \text{ در هر نقطه دیگری مانند } Y)$$

راه‌حل

راه‌حل استادانه زیر را دن سوکولوفسکی (از شهر ویلیامزبورگ در ایالت ویرجینیا) است.

به همین ترتیب، با امتداد دادن پاره‌خطهای NX و NQ قطری از C مشخص می‌شود که بر L عمود است، و در نتیجه NX و NQ نیز به ترتیب از نقاط R و S می‌گذرند. اینک RM و SN را امتداد دهید تا یکدیگر را در نقطه T قطع کنند و مثلث TRS کامل شود. تا این مرحله، معلوم نیست که نقطه T بر خط L واقع است یا خیر. بدیهی است که در این مثلث RN و SM ارتفاع‌اند؛ پس، X مرکز ارتفاعی آن است و در نتیجه TX سومین ارتفاع مثلث است (که بر RS عمود است). ولی L بر RS عمود است و از X می‌گذرد؛ در نتیجه، T واقعاً روی L قرار دارد. در نتیجه در $\triangle TRS$ ، PQ با RS موازی است (شکل ۹۸ را ببینید) و به این ترتیب دو جفت از مثلثهای مشابه به دست می‌آید:

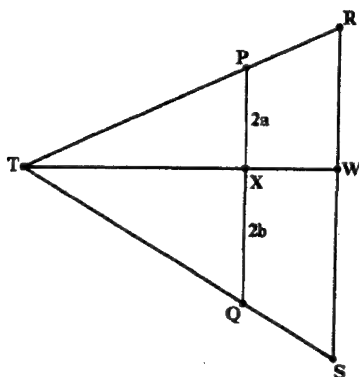
$$(TXP, TWR), (TXQ, TWS)$$

با توجه به اینکه PX و QX قطر دایره‌های A و B هستند، پس

$$\frac{2a}{RW} = \frac{TX}{TW} = \frac{2b}{WS}$$

و در نتیجه

$$\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{RW}{WS}$$

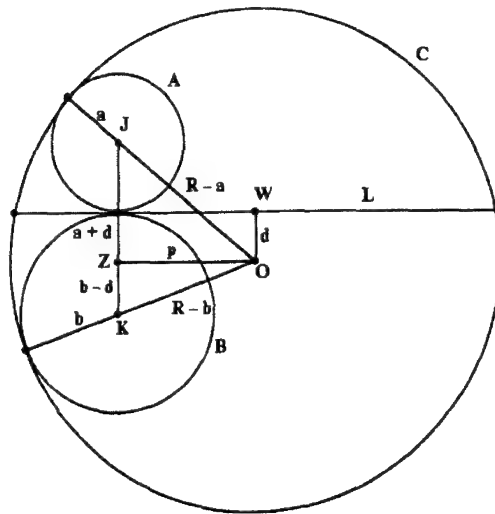


شکل ۹۸

ولی $\frac{RW}{SW}$ خارج قسمت طول بخشهایی است که L روی قطری از C که بر آن عمود است جدا کرده است و کاملاً از محل نقطه X روی L مستقل است. به این ترتیب حکم مسأله ثابت می‌شود. در راه حل دوم که از سام باتج (از شهر سن آنتونیو در ایالت تگزاس) است، به نظر می‌رسد که مسأله، پیش از اینکه حل کردن آن را به درستی آغاز کرده باشیم، به شکلی معجزه‌آمیز حل می‌شود. حقیقتاً هر قفلی با کلید درست چه آسان باز می‌شود.

فرض کنید مرکز دایره‌های A , B و C به ترتیب J , K و O و شعاع آنها به ترتیب a , b و c باشد. همچنین فرض کنید $OW = d$, $OZ = p$ و $OZ = p$, عمودهایی باشند که از O بر خط L و خط‌المركزین JK رسم شده‌اند (شکل ۹۹ را ببینید). در این صورت بدیهی است که

$$\begin{aligned} JZ &= a + d, & KZ &= b - d \\ JO &= R - a, & KO &= R - b \end{aligned}$$



شکل ۹۹

اینک، با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلثهای JOZ و KOZ ، مسأله را حل می‌کنیم. می‌توان

نوشت

$$p^2 + (a + d)^2 = (R - a)^2 \quad (۱)$$

و

$$p^2 + (b - d)^2 = (R - b)^2 \quad (۲)$$

پس از ساده کردن (۱) به‌دست می‌آوریم

$$p^2 + a^2 + 2ad + d^2 = R^2 - 2aR + a^2$$

و در نتیجه

$$a = \frac{R^2 - p^2 - d^2}{2(d + R)}$$

به همین ترتیب از (۲) نتیجه می‌شود

$$p^r + b^r - 2bd + d^r = R^r - 2bR + b^r$$

و در نتیجه

$$b = \frac{R^r - p^r - d^r}{2(R - d)}$$

بنابراین

$$\frac{a}{b} = \frac{R - d}{R + d}$$

یعنی $\frac{a}{b}$ مقدار ثابتی است.

دو مسأله از دومین المپیاد بالکان، ۱۹۸۵

(کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۷۱-۷۲)

مسأله ۱

بیگانگی افراد با زبانهای یکدیگر همواره یکی از مشکلات کنفرانسهای بین‌المللی است. از ۱۹۸۵ شرکت‌کننده‌ای که در یکی از کنفرانسهای اخیر حضور داشتند، هیچ‌یک بیش از ۵ زبان نمی‌دانست و در هر جمع سه نفری از آنها، دست‌کم دو نفر به زبانی مشترک صحبت می‌کردند. ثابت کنید دست‌کم ۲۰۰ نفر از شرکت‌کنندگان می‌توانستند به یک زبان مشترک صحبت کنند.

راه‌حل

(راه‌حل مشابهی در کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۹۱، ۲۲۸ آمده است.)

شاید نخستین چیزی که به ذهن می‌رسد اصل لانه‌کبوتری و نیز این باشد که دز صورتی که هیچ‌یک از زبانها را بیش از ۱۹۹ نفر از شرکت‌کنندگان به‌کار نبرند، عددیایی که در مسأله بیان شده‌اند نادرست خواهند بود. در نتیجه، براساس این فرضیه، می‌کوشیم به تناقضی دست یابیم.

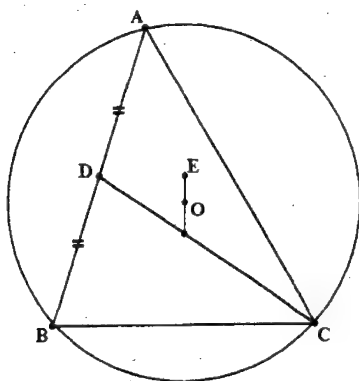
اگر دو نفر از حاضرین مانند A و B زبانی مشترک نداشته باشند، آنگاه در هر سه‌تایی مانند (A, B, C) که در آن شرکت دارند، C باید با یکی از دو نفر A و B (یا هر دو آنها)، زبانی مشترک داشته باشد. اینک بنابر فرض تعداد افرادی که بتوانند به زبان خاصی صحبت کنند که A یا B آن را می‌دانند بیش از ۱۹۸ نفر نیست، و چون A و B روی هم بیش از ۱۰ زبان مختلف را نمی‌دانند، پس نمی‌توانیم بیش از $10 \times 198 = 1980$ نفر را به‌عنوان C انتخاب کنیم تا اینکه سه‌تایی قابل قبولی مانند (A, B, C) کامل شود. این تعداد از $1983 - 2 = 1985$ ، یعنی تعداد کسانی که بنابر فرض مسأله می‌توانند این نقش را ایفا کنند، کمتر است، و به این ترتیب به تناقض رسیده‌ایم.

به آسانی می‌توان از بررسی حالت دیگر صرف‌نظر کرد، زیرا احتمال اینکه دو نفر از میان ۱۹۸۵ شرکت‌کننده هیچ زبان مشترکی نداشته باشند بسیار زیاد است. با وجود این، بازهم لازم است این احتمال را در نظر بگیریم که هر جفتی مانند (A, B) زبانی مشترک داشته باشند. خوشبختانه اثبات حکم در این حالت چیز پیش پا افتاده‌ای است، زیرا در این صورت بجز A ، ۱۹۸۴ شرکت‌کننده دیگر باید بتوانند یکی از پنج زبان یا کمتر از آن را که A می‌تواند به آنها صحبت کند به کار ببرند، که (با در نظر گرفتن A) میانگین کسانی که یکی از این زبانها را می‌دانند ۳۹۷ می‌شود.

مسأله ۲

(دو راه حل دیگر در کروکس ماتماتیکوروم، ۱۹۹۱، ۱۰۵ و ۲۲۸ آمده است.)

نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث ABC ، CD میانه وارد بر AB و E محل برخورد میانه‌های مثلث ACD است. ثابت کنید OE بر CD عمود است اگر و تنها اگر $\triangle ABC$ متساوی الساقین باشد به طوری که $AB = AC$.



شکل ۱۰۰

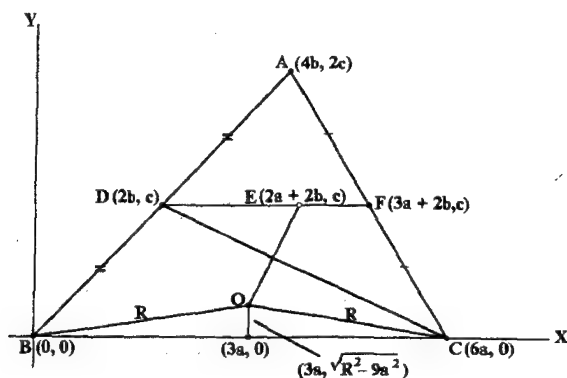
از آنجا که علاقه زیادی به هندسه اقلیدسی دارم، همواره نخستین کوششم برای حل هر مسأله‌ای که به زبان اقلیدسی بیان شده است استفاده از روشهای ترکیبی است. پس از اینکه بخش عمده‌ای از بعدازظهر را صرف اندیشیدن روی این مسأله کردم، دست آخر تصمیم گرفتم که روش تحلیلی را نیز آزمایش کنم، زیرا همان‌طور که می‌دانیم می‌توان خطهای عمود برهم را به آسانی با استفاده از شیهای عکس و قرینه به‌طور تحلیلی مشخص کرد. ده دقیقه بعد مسأله به‌طور کامل حل شد و بار دیگر از هندسه تحلیلی شکست خوردم.

بعدها که بازهم به این مسأله فکر کردم، دریافتم که این مسأله با روشهای برداری نیز قابل حل

است، و به این راه حل برداری، که تقریباً همان پیچیدگیهای راه حل تحلیل را داراست، به سرعت دست یافتم. چون به نظر می‌رسد که بردارها ویژگیهای اصلی پیکربندی را، اغلب با اضافه کردن یک یا دو چندضلعی، به آسانی نشان می‌دهند، امیدوارم که از هر دو راه حل زیر لذت ببرید.

روش تحلیلی

فرض کنید مختصات دکارتی رأسها $A(4a, 2c)$ ، $B(0, 0)$ و $C(6a, 0)$ باشند. در این صورت مختصات وسط AB ، $(2b, c)$ است.



شکل ۱۰۱

چون E نقطه برخورد میانه‌های $\triangle ADE$ است، DE میانه است و در نتیجه ضلع مقابل یعنی AC را در وسط آن، $F(3a + 2b, c)$ قطع می‌کند. از آنجا که نقطه برخورد میانه‌ها هر یک از آنها را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، مختصات E ، $(2b + 2a, c)$ است.

چون O روی عمود منصف BC قرار دارد، به آسانی معلوم می‌شود که مختصات آن $(3a, \sqrt{R^2 - 9a^2})$ است که در آن $R = BO$ ، شعاع دایره محیطی $\triangle ABC$ است.

بنابراین

$$\text{شیب } CD = \frac{-c}{6a - 2b}$$

$$\text{شیب } OE = \frac{\sqrt{R^2 - 9a^2} - c}{a - 2b}$$

و CD و OE برهم عمودند اگر و تنها اگر

$$\frac{-c}{6a - 2b} \times \frac{\sqrt{R^2 - 9a^2} - c}{a - 2b} = -1$$

$$c \left[\sqrt{R^2 - 9a^2} - c \right] = (6a - 2b)(a - 2b)$$

$$c\sqrt{R^2 - 9a^2} - c^2 = 6a^2 - 14ab + 4b^2$$

$$c\sqrt{R^2 - 9a^2} = c^2 + 6a^2 - 14ab + 4b^2$$

اینک، می‌توان از برابری $AO = R$ عبارت دیگری برای $c\sqrt{R^2 - 9a^2}$ به دست آورد:

$$AO^2 = (3a - 4b)^2 + (\sqrt{R^2 - 9a^2} - 2c)^2 = R^2$$

$$(3a - 4b)^2 + R^2 - 9a^2 - 4c\sqrt{R^2 - 9a^2} + 4c^2 = R^2$$

$$9a^2 - 24ab + 16b^2 - 9a^2 + 4c^2 = 4c\sqrt{R^2 - 9a^2}$$

و بالاخره

$$-6ab + 4b^2 + c^2 = c\sqrt{R^2 - 9a^2}$$

بنابراین CD و OE برهم عمودند اگر و تنها اگر

$$-6ab + 4b^2 + c^2 = c^2 + 6a^2 - 14ab + 4b^2$$

$$8ab = 6a^2$$

$$4b = 3a$$

این نتیجه معادل با این است که $A(4b, 2c)$ همان نقطه $A(3a, 2c)$ واقع بر عمودمنصف BC باشد، یعنی اگر و تنها اگر $AB = AC$.

راه حل برداری

بازهم لازم است به چند پیشنهاد ساده توجه کنیم:

(الف) E میانه DF از $\triangle ADC$ را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، و در نتیجه $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DF}$.

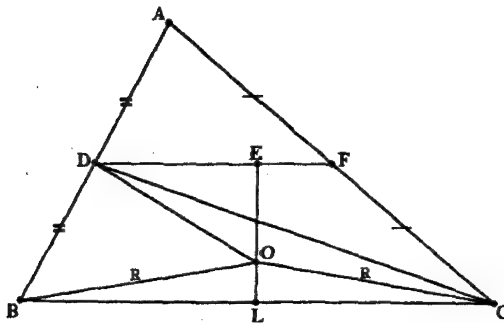
(ب) چون D و F وسطهای AB و AC هستند، $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ و در نتیجه

$$\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$$

(ج) از آنجا که O روی عمودمنصفهای AB و BC قرار دارد، با استفاده از نمادهای معمولی،

$$AB = c, AC = b, BC = a$$

$$R \cos \angle ABO = BD = \frac{1}{2}c, R \cos \angle OBC = BL = \frac{1}{2}a, \dots \quad (*)$$



شکل ۱۰۲

اینک بدیهی است که

$$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$$

و در نتیجه

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BO}$$

$$= \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BO}$$

همچنین

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$$

و در نتیجه

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}$$

با توجه به برابری $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| |\overrightarrow{v}| \cos \theta$ که در آن θ زاویه بین \overrightarrow{u} و \overrightarrow{v} است، حاصل ضرب

داخلی \overrightarrow{OE} و \overrightarrow{DC} برابر است با

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{DC} &= \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BO} \right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} \right) \\ &= \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{9} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &\quad - \frac{1}{9} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= \frac{1}{3} ca \cos B - \frac{1}{9} c^2 + \frac{1}{3} a^2 - \frac{1}{9} ac \cos B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -Ra \cos \angle OBC + \frac{1}{4}Rc \cos \angle ABO \\
 & = \frac{1}{4}ca \cos B - \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 \quad (\text{بنابر (*) در بالا}) \\
 & = \frac{1}{4}ca \cos B - \frac{1}{4}a^2 \\
 & \text{در نهایت، بنابر قانون کسینوسها، } ca \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \text{ و در نتیجه} \\
 & \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4} - \frac{1}{4}a^2 \\
 & = \frac{1}{4}(c^2 - b^2)
 \end{aligned}$$

و سمت راست این برابری به وضوح وقتی و فقط وقتی صفر می شود، و تعامد مورد نظر مسأله از آن نتیجه می شود، که $c = b$ ، یا معادل آن، $AB = AC$.

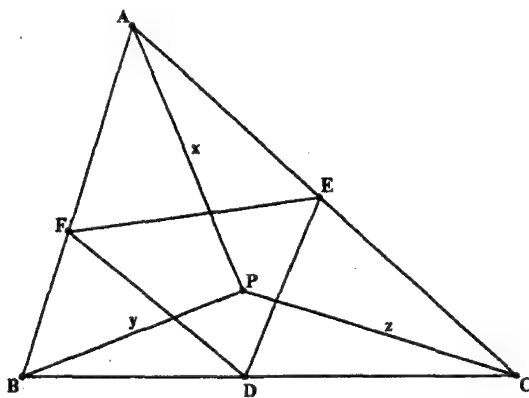
از ویژگیهای مثلثهای پایی

(مسأله ۱۰۷۶، کרוکس ماتماتیکوروم، ۱۹۸۷، ۶۲)

مثلث DEF که از پای عمودهای وارد بر سه ضلع مثلث ABC ، از نقطه‌ای مانند P درون مثلث، پدید می‌آید، مثلث پایی P نسبت به مثلث ABC نامیده می‌شود. در این مسأله از ما خواسته‌اند دستور جالبی را ثابت کنیم که مساحت مثلث را به مساحت مثلث پایی آن مربوط می‌کند.

اگر x, y, z به ترتیب فاصله‌های نقطه P تا سه رأس A, B, C باشند، ثابت کنید نقطه P ، هر جا که درون $\triangle ABC$ انتخاب شود،

$$x^2 \sin^2 A + y^2 \sin^2 B + z^2 \sin^2 C + 8(\text{مساحت } \triangle DEF) = 4(\text{مساحت } \triangle ABC)$$



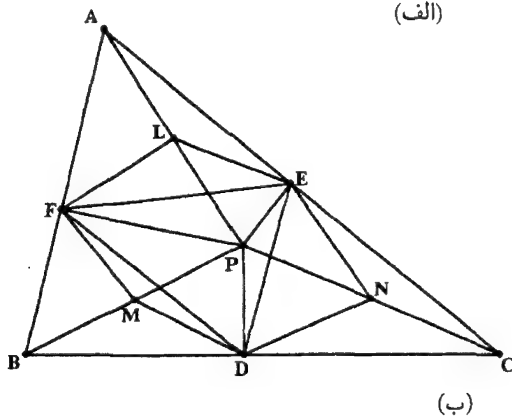
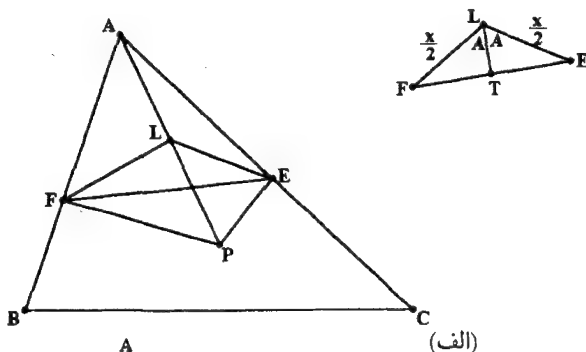
شکل ۱۰۳

این دستور را طراح و حل‌کننده خلاق مسائل ریاضی، ماری کلامکین (استاد بازنشسته دانشگاه آلبرتا) یافته است و راه حل زیبای زیر از هندسه‌دان برجسته یونانی، جورج تسینتسیفاس (ساکن شهر تسالونیک) است.

راه حل

چون PE و PF بر ضلعهای مثلث عمودند، چهارضلعی $AFPE$ محاطی است و در حقیقت AP قطر دایره محاطی این چهارضلعی است که مرکزش وسط AP ، L ، و شعاعش $\frac{1}{4}AP = \frac{1}{4}x$ است (شکل ۱۰۴ الف) را ببینید. از آنجا که هریک از شعاعهای LF و LE برابر با $\frac{1}{4}x$ ، و زاویه مقابل به وتر EF در رأس L ، دو برابر زاویه مقابل به این وتر در رأس A است، نتیجه می گیریم که $\angle FLE = 2A$. چون $\triangle FLE$ متساوی الساقین است، ارتفاع LT زاویه رأس L و نیز قاعده FE را نصف می کند و (شکل کوچکی را که در شکل ۱۰۴ الف) آمده است ببینید)

$$\angle FLT = A, \quad FT = \frac{1}{4}FE$$



شکل ۱۰۴ الف و ب)

ولی در $\triangle FLT$ ، $FT = \frac{x}{4} \sin A$. بنابراین

$$FT = \frac{1}{4}FE = \frac{1}{4}x \sin A$$

و در نتیجه

$$EF = x \sin A$$

همچنین $LT = \frac{x}{\gamma} \cos A$ و در نتیجه

$$x \cos A = \gamma LT$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} x^{\gamma} \sin \gamma A &= x^{\gamma} (\gamma \sin A \cos A) \\ &= \gamma (x \sin A) (x \cos A) \\ &= \gamma EF \times \gamma LT \\ &= \gamma \left(\frac{1}{\gamma} EF \times LT \right) \end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$x^{\gamma} \sin \gamma A = \gamma (\Delta FLE \text{ مساحت})$$

به همین ترتیب، با توجه به شکل ۱۰۴ (ب)،

$$y^{\gamma} \sin \gamma B = \gamma (\Delta FMD \text{ مساحت})$$

و

$$z^{\gamma} \sin \gamma C = \gamma (\Delta DNE \text{ مساحت})$$

بنابراین

$$\begin{aligned} x^{\gamma} \sin \gamma A + y^{\gamma} \sin \gamma B + z^{\gamma} \sin \gamma C \\ = \gamma (\Delta FLE \text{ مساحت} + \Delta FMD \text{ مساحت} + \Delta DNE \text{ مساحت}) \end{aligned}$$

اگر به دو طرف برابری بالا γ برابر مساحت مثلث DEF را اضافه کنیم، به دست می‌آید

$$x^{\gamma} \sin \gamma A + y^{\gamma} \sin \gamma B + z^{\gamma} \sin \gamma C + \gamma (\Delta DEF \text{ مساحت})$$

$$= \gamma (FLENDM \text{ مساحت شش ضلعی})$$

در آخر، چون L ، M و N وسطهای AP ، BP و CP هستند، به آسانی معلوم می‌شود که در

ΔABC مساحت ناحیه بیرونی شش ضلعی $FLENDM$ برابر با مساحت ناحیه درونی آن است:

میانه FL مثلث APF را نصف می‌کند و همین‌طور میانه‌های LE ، EN ،

DM و MF ، ND

بنابراین

$$\Delta ABC \text{ مساحت} = \gamma (FLENDM \text{ مساحت})$$

و در نتیجه

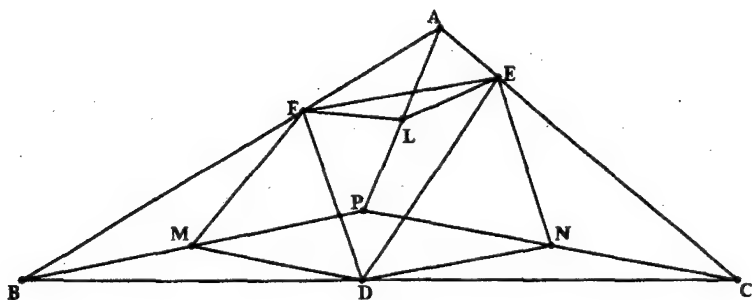
$$\gamma (\Delta ABC \text{ مساحت}) = \gamma (FLENDM \text{ مساحت})$$

که از آن نتیجه مطلوب به دست می آید.

توجه کنید که اگر $\triangle ABC$ ، مثلاً در رأس A ، منفرجه باشد، $\sin 2A$ منفی می شود و در نتیجه علامت $\sin 2A \cdot x^2 (= \text{مساحت}(\triangle FLE))$ نیز منفی می شود، و مجبوریم مساحت $\triangle FLE$ را منفی در نظر بگیریم. ولی در حالتی که زاویه A منفرجه است، از شکل ۱۰۵ معلوم می شود که برای به دست آوردن مساحت شش ضلعی $FLENDM$ ، باید مساحت $\triangle FLE$ را از مساحت مثلث پایی کم کنیم تا بتوانیم مقدار درستی را به مساحت مثلثهای MFD و DNE اضافه کنیم:

$$\begin{aligned} \text{مساحت } FLENDM &= \text{مساحت } \triangle MFD + \text{مساحت } \triangle DNE \\ &\quad + (\text{مساحت } \triangle DEF - \text{مساحت } \triangle FLE) \end{aligned}$$

بنابراین در مورد مثلثهای منفرجه با در نظر گرفتن مساحت منفی استدلال بالا معتبر باقی می ماند، و نتیجه می گیریم که دستور مورد نظر در مورد تمام مثلثها درست است.



شکل ۱۰۵

سه راه حل دیگر از جورج اوا گلوپولس

سه مسأله این بخش تا اندازه‌ای تکنیکی و نسبت به مسائل دیگر این کتاب دشوارترند، و نیاز به تمرکز حواس بیشتری دارند. با وجود این، این مسائل بسیار جالب‌اند و آوردن راه‌حلهای هوشمندانه جورج خود پاداش درخوری به سخت‌کوشی خواننده است.

مسأله ۱

این مسأله نابرابری دشوار است که از طرف روسیه مطرح شده است. ([۱۹۸۵, ۷۳], [۱۹۸۷, ۴۹۱]). فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n و n عدد حقیقی و مثبت و کوچکتر از ۱ یا مساوی با آن باشند که لزوماً متمایز نیستند و از نظر اندازه به‌طور نازولی مرتب شده‌اند:

$$1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n > 0$$

در این صورت، اگر a مقداری در $[0, 1]$ باشد، نابرابری به‌ظاهر دشوار زیر را ثابت کنید:

$$(1 + x_1 + \dots + x_n)^a \leq 1 + x_1^a + \frac{1}{2}(2x_2)^a + \frac{1}{3}(3x_3)^a + \dots + \frac{1}{n}(nx_n)^a$$

راه حل

تعجب‌آور نیست که مسائلی از این قبیل، غالباً به استقرا قابل حل باشند. با وجود این، جمع‌وجور کردن جزئیات ممکن است کار بسیار دشواری باشد.

به‌سادگی معلوم می‌شود که این نابرابری در مورد تک عددی مانند x_1 برقرار است. چون $x_1 > 0$ ، پس $1 + x_1 > 1$ ، و چون $0 \leq a \leq 1$ ، توان a ام $1 + x_1$ ، از $1 + x_1$ کمتر است:

$$(1 + x_1)^a \leq 1 + x_1$$

از طرف دیگر چون $x_1 \leq 1$ و $0 \leq a \leq 1$ ، پس x_1^a از x_1 بزرگتر است و بنابراین

$$(1 + x_1)^a \leq 1 + x_1 \leq 1 + x_1^a$$

پس نابرابری موردنظر درست است.

اینک فرض کنید نابرابری موردنظر در مورد عددی طبیعی مانند k درست باشد، یعنی

$$(1 + x_1 + \dots + x_k)^a \leq 1 + x_1^a + \frac{1}{p}(2x_p)^a + \dots + \frac{1}{k}(kx_k)^a$$

و نیز فرض کنید $\{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}$ مجموعه مناسبی از $k+1$ عدد باشد.

اگر بتوانیم ثابت کنیم

$$(1 + x_1 + \dots + x_{k+1})^a - (1 + x_1 + \dots + x_k)^a \leq \frac{1}{k+1}[(k+1)x_{k+1}]^a \quad (1)$$

نابرابری موردنظر به استقرا ثابت می‌شود، زیرا در این صورت

$$\begin{aligned} (1 + x_1 + \dots + x_{k+1})^a &\leq (1 + x_1 + \dots + x_k)^a + \frac{1}{k+1}[(k+1)x_{k+1}]^a \\ &\leq 1 + x_1^a + \frac{1}{p}(2x_p)^a + \dots + \frac{1}{k}(kx_k)^a + \frac{1}{k+1}[(k+1)x_{k+1}]^a \end{aligned}$$

برای اثبات (۱)، جورج طرف چپ آن را در نظر می‌گیرد و از جمله دوم فاکتورگیری می‌کند تا

حاصل شود

$$\begin{aligned} &(1 + x_1 + \dots + x_k)^a \left[\left(1 + \frac{x_{k+1}}{1 + x_1 + \dots + x_k} \right)^a - 1 \right] \\ &\left(1 + \frac{x_{k+1}}{1 + x_1 + \dots + x_k} \right)^a \text{ کوچکتر از } \left(1 + \frac{x_{k+1}}{1 + x_1 + \dots + x_k} \right)^a \text{ پس } 0 \leq a \leq 1 \text{ چون} \\ &\text{یا با آن مساوی است، و در نتیجه} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(1 + x_1 + \dots + x_{k+1})^a - (1 + x_1 + \dots + x_k)^a \\ &= (1 + x_1 + \dots + x_k)^a \left[\left(1 + \frac{x_{k+1}}{1 + x_1 + \dots + x_k} \right)^a - 1 \right] \\ &\leq (1 + x_1 + \dots + x_k)^a \left[\left(1 + \frac{x_{k+1}}{1 + x_1 + \dots + x_k} \right)^1 - 1 \right] \\ &= (1 + x_1 + \dots + x_k)^{a-1} x_{k+1} \quad (2) \end{aligned}$$

حال، چون ترتیب x_i ها نازولی است، پس

$$\begin{aligned} 1 + x_1 + \dots + x_k &\geq x_{k+1} + x_{k+1} + \dots + x_{k+1} \quad (k+1 \text{ بار}) \\ &= (k+1)x_{k+1} \end{aligned}$$

چون $1 + x_1 + \dots + x_k$ بزرگتر از ۱ است و نیز $1 - a \geq 0$ ، نتیجه می‌شود

$$(1 + x_1 + \dots + x_k)^{1-a} \geq [(k+1)x_{k+1}]^{1-a}$$

اگر نماها را در -1 ضرب کنیم باید پایه‌ها را هم معکوس کنیم، بنابراین

$$(1 + x_1 + \dots + x_k)^{a-1} \leq [(k+1)x_{k+1}]^{a-1}$$

که اگر آن را در x_{k+1} ضرب کنیم، به دست می آید

$$\begin{aligned} (1 + x_1 + \dots + x_k)^{a-1} x_{k+1} &\leq [(k+1)x_{k+1}]^{a-1} x_{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1} [(k+1)x_{k+1}]^a \end{aligned} \quad (3)$$

در نهایت، با ادغام (۲) و (۳)،

$$\begin{aligned} (1 + x_1 + \dots + x_{k+1})^a - (1 - x_1 + \dots + x_k)^a \\ \leq (1 + x_1 + \dots + x_k)^{a-1} x_{k+1} \\ \leq \frac{1}{k+1} [(k+1)x_{k+1}]^a \end{aligned} \quad ((2) \text{ بنابر})$$

مسئله ۲

اینک به مسئله ای از دور آخر المپیاد ۱۹۸۵ بلغارستان می پردازیم [۱۹۸۸، ۲۳۰]. فرض کنید α_a بزرگترین مقسوم علیه فرد عدد طبیعی a و S_b مجموع زیر باشد:

$$S_b = \frac{\alpha_1}{1} + \frac{\alpha_2}{2} + \dots + \frac{\alpha_b}{b} = \sum_{a=1}^b \frac{\alpha_a}{a}$$

ثابت کنید دنباله $\left\{ \frac{S_b}{b} \right\}$ همگراست و حد آن را بیابید.

راه حل

بدیهی است که بزرگترین مقسوم علیه فرد عدد صحیح a ، α_a عددی است که پس از تقسیم کردن a تا حد امکان بر ۲ باقی می ماند:

$$a = 2^{r_a} \times \alpha_a$$

در اینجا 2^{r_a} بزرگترین توان عدد ۲ است که a را می شمارد؛ مثلاً $\alpha_{68} = 17$ (زیرا $68 = 2^2 \times 17$) و $\alpha_{69} = 69$ (زیرا $69 = 3 \times 23$). در نتیجه $\frac{\alpha_a}{a} = \frac{1}{2^{r_a}}$ و S_b برابر است با

$$S_b = \frac{1}{2^{r_1}} + \frac{1}{2^{r_2}} + \frac{1}{2^{r_3}} + \dots + \frac{1}{2^{r_b}}$$

حال، عددهای صحیح بسیاری وجود دارند که بزرگترین توان عدد ۲ در ساختن آنها یکسان است. برای مثال، بزرگترین توان ۲ که هریک از عددهای ۱۲، ۲۸ و ۵۲ را می شمارد $4 = 2^2$ است. در صورتی که بتوانیم تعیین کنیم که چه تعدادی از جمله های S_b برابر با $\frac{1}{2^k}$ است، چه تعدادی برابر با $\frac{1}{2^{k+1}}$ است و الی آخر، می توانیم مقدار سری S_b را به دست آوریم. همان طور که گفتیم، به ازای هر عدد صحیح مانند a در $\{1, 2, \dots, b\}$ ، اگر بزرگترین توان ۲ که آن را می شمارد 2^k باشد، $\frac{1}{2^k}$ هم در مجموع ظاهر می شود. خوشبختانه می توانیم این عددهای صحیح را به روش زیر بشماریم.

تعداد مضربهای 2^k که کوچکتر از b یا مساوی با آن هستند، برابر است با $[b/2^k]$ ، یعنی جزء صحیح $b/2^k$. فقط به عددهایی علاقه‌مندیم که 2^k بزرگترین توانی از ۲ است که آنها را می‌شمارد و نمی‌خواهیم عددهایی را که بر 2^{k+1} هم بخش‌پذیرند به حساب بیاوریم. ولی مضربها 2^k یکی‌درمیان به شکل $2^k \times (\text{عددی زوج})$ ، یعنی به شکل $2^k \times 2t$ ، هستند، و در نتیجه چنین عددهایی مضرب 2^{k+1} هستند. از آنجا که تعداد مضربهای ناخواسته 2^{k+1} در $\{1, 2, \dots, b\}$ برابر با $[b/2^{k+1}]$ است، دفعاتی که 2^k به عنوان بزرگترین توان ۲ ظاهر می‌شود دقیقاً برابر است با

$$\left[\frac{b}{2^k} \right] - \left[\frac{b}{2^{k+1}} \right]$$

بنابراین، سهم چنین جمله‌هایی در مجموع S_b برای است

$$\left\{ \left[\frac{b}{2^k} \right] - \left[\frac{b}{2^{k+1}} \right] \right\} \times \frac{1}{2^k}$$

و مجموع کل به صورت زیر است

$$S_b = \sum_{k \geq 0} \left\{ \left[\frac{b}{2^k} \right] - \left[\frac{b}{2^{k+1}} \right] \right\} \times \frac{1}{2^k}$$

در این مجموع، جمله‌ها تا جایی که 2^k بیشتر از b نشده است غیرصفرند و پس از آن $[b/2^k] = 0$. اگر چند جمله اول این مجموع را بسط دهیم و ساده کنیم، دستور سودمند دیگری برای S_b به دست می‌آید:

$$S_b = \left\{ \left[\frac{b}{2^0} \right] - \left[\frac{b}{2^1} \right] \right\} \times \frac{1}{2^0} + \dots$$

و نتیجه می‌گیریم

$$S_b = b - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \left[\frac{b}{2^k} \right]$$

اینک، بنابر تعریف $[x]$ ، بدیهی است که $[x]$ از x بیشتر نیست و هیچ‌گاه برابر با $x - 1$ نیز نمی‌شود:

$$x - 1 < [x] \leq x$$

در نتیجه، به ازای هر $k, k \geq 1$.

$$\frac{b}{2^k} - 1 < \left[\frac{b}{2^k} \right] \leq \frac{b}{2^k}$$

اگر دو طرف نابرابری بالا را در $\frac{1}{2^k}$ ضرب کنیم حاصل می‌شود

$$\frac{b}{2^k} - \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^k} \left[\frac{b}{2^k} \right] \leq \frac{b}{2^k}$$

با جمع کردن نابرابری‌های بالا به دست می‌آوریم

$$b \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} < \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \left[\frac{b}{2^k} \right] \leq b \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k}$$

با محاسبه مجموع این سریهای هندسی به دست می‌آوریم

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{4^k} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

و

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

و در نتیجه

$$\frac{b}{3} - 1 < \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \left[\frac{b}{2^k} \right] \leq \frac{b}{3}$$

با ضرب کردن این نابرابریها در ۱-، جهت آنها عوض می‌شود و نتیجه می‌گیریم

$$-\frac{b}{3} \leq -\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \left[\frac{b}{2^k} \right] < 1 - \frac{b}{3}$$

اگر b را به سه طرف اضافه کنیم نتیجه می‌شود

$$\frac{2}{3}b \leq S_b < 1 + \frac{2}{3}b$$

و سرانجام اگر طرفین این نابرابریها را بر b تقسیم کنیم،

$$\frac{2}{3} \leq \frac{S_b}{b} < \frac{2}{3} + \frac{1}{b}$$

و در نتیجه

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{S_b}{b} = \frac{2}{3}$$

مسئله ۳

در آخر، مسأله‌ای از المپیاد سراسری ۱۹۸۴ اتحاد جماهیر شوروی می‌آوریم [۱۹۸۶، ۲۳۵].

فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n چهار عدد طبیعی و یا بیشتر باشند که به ترتیب روی دایره‌ای قرار گرفته‌اند و مجموع همسایه‌های هریک از x_i ها مضربی از خودش است؛ یعنی $\frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{x_i} = k_i$ ، که در آن k_i عددی طبیعی است (و $x_{n+1} = x_1$). ثابت کنید S_n ، یعنی مجموع همه این k_i ها، همواره بزرگتر از $2n$ یا مساوی با آن است، ولی هیچ‌گاه برابر با $3n$ نمی‌شود؛ به عبارت دیگر،

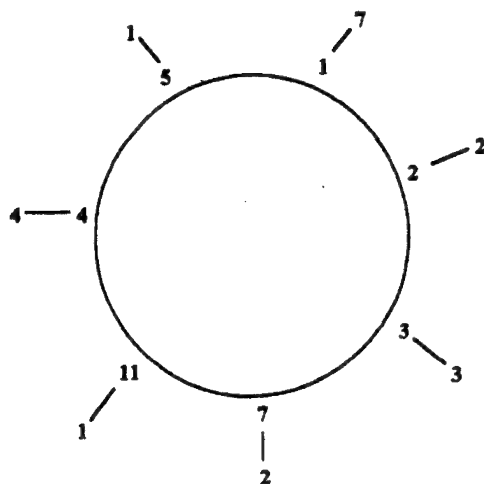
$$2n \leq S_n < 3n$$

در شکل ۱۰۶، در حالتی که $n = 7$ مثالی آمده است:

$$S_7 = 7 + 2 + 3 + 2 + 1 + 4 + 1 = 20$$

و در نتیجه

$$14 \leq S_7 = 20 < 21$$



شکل ۱۰۶

راه حل

بدیهی است که به ازای هر i ، عبارت

$$S_n = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

$$= \frac{x_n + x_2}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_2 + x_4}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1} + x_1}{x_n}$$

شامل هر دو کسر $\frac{x_i}{x_{i+1}}$ و $\frac{x_{i+1}}{x_i}$ است (به خاطر بیاورید که $x_{n+1} = x_1$). چون به ازای هر دو عدد حقیقی و مثبت مانند a و b ، $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ بزرگتر از ۲ یا مساوی با آن است، نتیجه می شود

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} + \frac{x_i}{x_{i+1}} \right) \geq 2n$$

اینک به حکم دشوارتر می پردازیم، یعنی $S_n < 3n$.

با توجه به اینکه حکم در مورد سه عدد صحیح برقرار است، جورج با تیزهوشی برهان استقرایی خود را از حالتی که $n = 3$ (و نه حالتی که $n = 4$ و مفصلتر است) آغاز می کند.

(الف) $n = 3$:

$$S_3 = \frac{x_3 + x_2}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_2 + x_1}{x_3}$$

ممکن است همه x_i ها با هم برابر باشند. در این صورت، به ازای هر i ، $k_i = 2$ و به آسانی درمی یابیم

$$S_3 = 2 + 2 + 2 = 6 < 3 \times 3 = 3n$$

بنابراین، فرض کنید دو تا از عددهای x_1 ، x_2 و x_3 نابرابر و طوری شماره گذاری شده باشند که x_1 بزرگترین آنها و x_3 کوچکترین آنها باشد. نه بزرگترین عدد لزوماً منحصر به فرد است و نه کوچکترین

عدد، و در حقیقت در مورد x_2 سه حالت وجود دارد:

$$x_1 > x_2 > x_3, \quad x_1 > x_2 = x_3, \quad x_1 = x_2 > x_3$$

در هر صورت، همواره می‌توانیم دو رابطه زیر را بپذیریم:

$$x_1 \geq x_2, \quad x_1 > x_3$$

در نتیجه

$$\forall x_1 = x_1 + x_1 > x_2 + x_3$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$k_1 = \frac{x_2 + x_3}{x_1} < 2$$

چون k_1 عددی طبیعی است، باید $k_1 = 1$ و در نتیجه $x_1 = x_2 + x_3$. اگر در S_3 این مقدار را به جای x_1 بگذاریم نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} S_3 &= k_1 + k_2 + k_3 = 1 + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_3} \\ &= 1 + \frac{x_2 + 2x_3}{x_2} + \frac{2x_2 + x_3}{x_3} \\ &= 1 + \left(1 + \frac{2x_3}{x_2}\right) + \left(\frac{2x_2}{x_3} + 1\right) \end{aligned}$$

چون k_1 و k_2 عددهایی صحیح‌اند، پس کسرهای موجود در سمت راست عبارت بالا نیز عددهایی صحیح‌اند و چون این عددها به‌وضوح مثبت‌اند، درواقع باید عددهایی طبیعی باشند. ولی حاصل ضرب آنها، $\left(\frac{2x_3}{x_2}\right) \left(\frac{2x_2}{x_3}\right)$ ، برابر با ۴ است و در نتیجه مقادیر آنها باید (۲ و ۲) یا (۱ و ۴) باشد. بنابراین، در هر حالت مجموع آنها از ۵ بیشتر نیست. بنابراین

$$S_3 \leq 1 + 1 + 1 + 5 = 8 < 3 \times 3 = 3n$$

بنابراین حکم به‌ازای $n = 3$ درست است.

ب) اینک فرض کنید که به‌ازای m ، $S_{n-1} < 3(n-1)$ ، $n-1 \geq 3$ ، مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مناسبی از n عدد صحیح باشد.

به‌نظر می‌رسد که برهان بالا در حالت کلی نیز کارایی دارد. اگر همه x_i ها برابر باشند، فوراً نتیجه می‌گیریم

$$S_n = 2n < 3n$$

و در نتیجه فرض می‌کنیم بین x_i ها دست‌کم دو مقدار متفاوت وجود داشته باشد.

باز هم توجه خود را به x_i ای جلب می‌کنیم که ماکسیمم است. روشن است که ممکن است هر دو همسایه عدد ماکسیمم x_i همین مقدار ماکسیمم باشند. با وجود این، چون بین x_i ها دو مقدار متفاوت

وجود دارد، عددی ماکسیمم مانند x_i وجود دارد که دستکم یک همسایه کوچکتر دارد. فرض کنید x_n چنین عدد ماکسیممی باشد. در این صورت می‌توانیم مانند بالا استدلال کنیم:

$$2x_n = x_n + x_n > x_{n-1} + x_1 \Rightarrow k_n = \frac{x_{n-1} + x_1}{x_n} < 2$$

و در نتیجه $1 < k_n = x_{n-1} + x_1$.

از این رو

$$k_1 = \frac{x_n + x_2}{x_1} = \frac{x_{n-1} + x_1 + x_2}{x_1} = 1 + \frac{x_{n-1} + x_2}{x_1}$$

در نتیجه کسر

$$r_1 = \frac{x_{n-1} + x_2}{x_1}$$

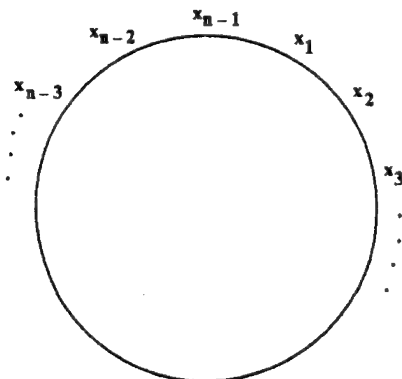
باید عددی طبیعی باشد. به همین ترتیب،

$$k_{n-1} = \frac{x_{n-2} + x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-2} + x_{n-1} + x_1}{x_{n-1}} = 1 + \frac{x_{n-2} + x_1}{x_{n-1}}$$

و در نتیجه $s = \frac{x_{n-2} + x_1}{x_{n-1}}$ باید عددی طبیعی باشد. خلاصه اینکه، می‌توان نوشت $k_1 = 1 + r$ و $k_{n-1} = 1 + s$ که در آنها r و s عددهایی طبیعی‌اند.

اینک مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ را در نظر بگیرید که از حذف این عدد ماکسیمم، x_n به دست می‌آید. پرسشی که مطرح است این است که آیا می‌توان فرض استقرا را درباره این مجموعه کوچک شده به کار برد؟ به عبارت دیگر، آیا همه کسرهای وابسته، $k'_1, k'_2, \dots, k'_{n-1}$ ، عددهایی صحیح‌اند؟ از آنجا که مقادیر $k'_1, k'_2, \dots, k'_{n-2}$ تغییر نکرده‌اند (یعنی $k'_1 = k_1, k'_2 = k_2, \dots, k'_{n-2} = k_{n-2}$)، همه چیز به k'_1 و k'_{n-1} بستگی دارد. ولی

$$k'_1 = \frac{x_{n-1} + x_2}{x_1} (= r \text{ عدد صحیح}), \quad k'_{n-1} = \frac{x_{n-2} + x_1}{x_{n-1}} (= s)$$



بنابراین، واقعاً می‌توان فرض استقرا را دربارهٔ این مجموعه به‌کار برد. در نتیجه

$$S_{n-1} = r + k_r + k_{r+1} + \dots + k_{n-2} + s < 3(n-1)$$

یادآور می‌شویم که، در مجموعهٔ کامل $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ، $k_1 = 1 + r$ و $k_{n-1} = 1 + s$

بنابراین

$$\begin{aligned} S_n &= k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} + k_n \\ &= (1 + r) + k_2 + \dots + k_{n-2} + (1 + s) + k_n \\ &= 1 + [r + k_2 + \dots + k_{n-2} + s] + 1 + 1 \quad (k_n = 1 \text{ به‌خاطر بیاورید که } 1) \\ &= 1 + S_{n-1} + 1 + 1 \\ &= S_{n-1} + 3 \\ &< 3(n-1) + 3 \\ &= 3n \end{aligned}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

نابرابری میانگین توانی

فرض کنید بخواهیم ثابت کنیم که به ازای هر عدد حقیقی و مثبت مانند a, b و c ، مقدار کسر

$$\frac{(a + 2b + 3c)^2}{a^2 + 2b^2 + 3c^2}$$

هرگز بزرگتر از ۶ نمی شود و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می شود که $a = b = c$. وسیله مناسبی برای انجام این کار، نابرابری موسوم به نابرابری میانگین توانی تعمیم یافته است. این نابرابری این است که به ازای $t < s$,

$$\left(\frac{p_1 a_1^t + p_2 a_2^t + \dots + p_n a_n^t}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)^{1/t} \leq \left(\frac{p_1 a_1^s + p_2 a_2^s + \dots + p_n a_n^s}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)^{1/s}$$

که در آن p ها و a ها عددهایی حقیقی و مثبت و دلخواه اند و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می شود که همه a ها با هم برابر باشند.

در مورد مسأله مورد نظر، اگر $t = 1$ و $s = 2$ و $p_1 = 1$ ، $p_2 = 2$ و $p_3 = 3$ ، از این نابرابری

نتیجه می شود

$$\left(\frac{a + 2b + 3c}{6} \right)^1 \leq \left(\frac{a^2 + 2b^2 + 3c^2}{6} \right)^{1/2}$$

دو طرف را به توان ۲ می رسانیم:

$$\frac{(a + 2b + 3c)^2}{36} \leq \frac{a^2 + 2b^2 + 3c^2}{6}$$

که از آن نابرابری مطلوب،

$$\frac{(a + 2b + 3c)^2}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} \leq 6$$

فوراً نتیجه می شود.

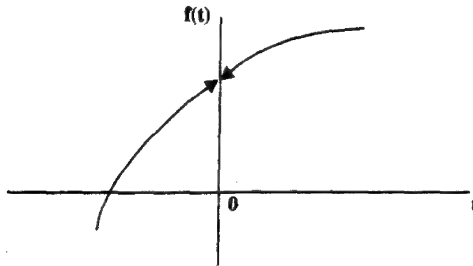
بنابراین، برخی اوقات این نابرابری دقیقاً همان وسیله مناسبی است که با آن می توان وضعیت دشواری را حل و فصل کرد. متأسفانه درباره این نابرابری زیاد صحبت نشده است، و امیدوارم که برهان زیر مورد توجه خواننده قرار بگیرد. اگرچه ممکن است به نظر برسد که در بعضی مواقع رشته بحث از

دست ما خارج می‌شود، ولی همواره می‌توان این‌گونه موارد را به سادگی جمع و جور کرد. در تمام برهان از ریاضیات سال اول دانشگاه استفاده شده است.

این نابرابری اساساً این است که به شرطی که a ها برابر نباشند، تابع

$$f(t) = \left(\frac{p_1 a_1^t + p_2 a_2^t + \dots + p_n a_n^t}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)^{1/t}$$

بر حسب t اکیداً صعودی است. (بدیهی است که اگر همه a ها برابر با k باشند، آنگاه به ازای هر t ، $f(t) = k$ که تابعی اکیداً صعودی نیست.) بنابراین فرض می‌کنیم همه a ها با هم برابر نباشند و نیز توجه می‌کنیم که نابرابری در مورد همه عددهای حقیقی (و نه فقط عددهای حقیقی مثبت) بیان شده است. بنابراین، پیش از اینکه برهان را آغاز کنیم، باید مقدار این تابع را به ازای $t = 0$ تعیین کنیم. همان‌طور که خواهیم دید، با کمی کوشش می‌توانیم ثابت کنیم که وقتی t ، چه از راست و چه از چپ، به 0 میل کند، تابع $f(t)$ به حدی مانند L میل می‌کند، و در نتیجه بدیهی است که فرض کنیم $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0)$ ، و بنابراین تابع $f(t)$ در $t = 0$ پیوسته است. بر این اساس، اگر بتوانیم ثابت کنیم که به ازای $t < 0$ و نیز $t > 0$ ، تابع $f(t)$ اکیداً صعودی است، نتیجه می‌شود که $f(t)$ همه جا اکیداً صعودی است.



شکل ۱۰۸

روشن است که اگر $\log f(t) \rightarrow k$ ، آنگاه (آنتی لگاریتم k) $f(t) \rightarrow k$ ، بنابراین برای تعیین $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ از $\lim_{t \rightarrow 0} [\log f(t)]$ استفاده می‌کنیم. اگر مجموع $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ را با P_n نشان دهیم و دستورهای

$$\frac{d[\log f(x)]}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad \frac{d(a^x)}{dx} = a^x \cdot \log a$$

را به یاد بیاوریم، از قاعده ل‌ویتال نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} [\log f(t)] &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\log \frac{p_1 a_1^t + \dots + p_n a_n^t}{P_n}}{t} \right] \quad (\text{که به ازای } t = 0 \text{ به صورت } \frac{0}{0} \text{ است}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{P_n}{p_1 a_1^t + \dots + p_n a_n^t} \left[\frac{p_1 a_1^t \log a_1 + \dots + p_n a_n^t \log a_n}{P_n} \right]}{1} \end{aligned}$$

اینک، t چه از راست به 0 میل کند و چه از چپ، $a_i^t \rightarrow 1$ و در نتیجه حد بالا برابر می‌شود با

$$L = \frac{p_1 \log a_1 + \dots + p_n \log a_n}{P_n} = \log [a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}]^{1/P_n}$$

یا اگر آنتی لگاریتم بگیریم می‌توانیم تعریف کنیم

$$f(\circ) = \lim_{t \rightarrow \circ} f(t) = [a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}]^{1/P_n}$$

سمت راست این تساوی میانگین هندسی مجموعه‌ای متشکل از P_n عدد است که هر a_i در آن p_i بار تکرار شده است.

حال که $f(\circ)$ را به‌طور مناسبی تعریف کردیم، می‌توانیم، به‌طور معمول، حکم مطلوب را با اثبات اینکه $f'(t) > 0$ و $t < 0$ مثبت است، ثابت کنیم. بازهم روشمان استفاده از لگاریتم $f(t)$ است. چون همه p_i ها و a_i ها عددهایی مثبت‌اند، پس $f(t)$ نیز به‌ازای هر مقداری از t مثبت است. در نتیجه، مشتق $\log f(t)$ ، یعنی

$$D = \frac{d[\log f(t)]}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

همواره با $f'(t)$ هم‌علامت است، مگر اینکه هردو آنها برابر با ۰ باشند. درستی این مطلب با ضرب کردن عبارت بالا در عدد نامنفی t^2 تغییر نمی‌کند. بنابراین، تابع $F(t)$ را در نظر می‌گیریم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$F(t) = t^2 D = t^2 \frac{f'(t)}{f(t)}$$

مقدار تابع $F(t)$ هنگامی مثبت است که D نیز مثبت باشد، و در این حالت D و $f'(t)$ هم‌علامت‌اند. بنابراین، اگر بتوانیم ثابت کنیم که وقتی t صفر نیست، مقدار $F(t)$ مثبت است، آنگاه نتیجه می‌شود که D و در نتیجه $f'(t)$ نیز به‌ازای t های ناصفر مثبت‌اند. دلیل استفاده از $F(t)$ این است که کار با این تابع نسبت به $f'(t)/f(t)$ آسانتر است.

چون $F(t) = t^2 D = t^2 \times \frac{d[\log f(t)]}{dt}$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} &= t^2 \left[\frac{1}{t} \left[\frac{P_n}{p_1 a_1^t + \dots + p_n a_n^t} \times \frac{p_1 a_1^t \log a_1 + \dots + p_n a_n^t \log a_n}{P_n} \right] \right] \\ &\quad + t^2 \left(-\frac{1}{t^2} \right) \times \log \frac{p_1 a_1^t + \dots + p_n a_n^t}{P_n} \\ &= t \times \frac{p_1 a_1^t \log a_1 + \dots + p_n a_n^t \log a_n}{p_1 a_1^t + \dots + p_n a_n^t} - \log \frac{p_1 a_1^t + \dots + p_n a_n^t}{P_n} \end{aligned}$$

یعنی

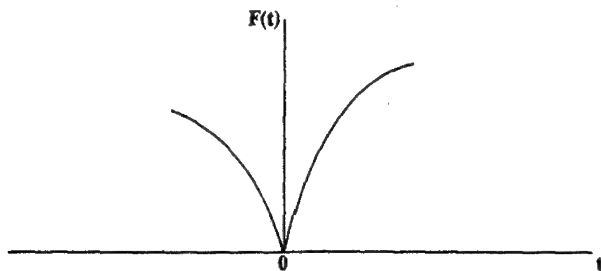
$$F(t) = t \times \frac{\sum p_i a_i^t \log a_i}{\sum p_i a_i^t} - \log \frac{\sum p_i a_i^t}{P_n}$$

به‌خاطر آوری‌د که آنچه می‌خواهیم ثابت کنیم این است که به‌ازای هر t ، $t \neq 0$ مقدار $F(t)$ مثبت است. همان‌طور که خواهیم دید، معلوم می‌شود که به‌ازای $t \neq 0$ ، علامت $F'(t)$ با علامت t یکی است، و در نتیجه به‌ازای مقادیر منفی t ، تابع $F(t)$ نزولی و به‌ازای مقادیر مثبت t ، تابع $F(t)$ صعودی است (به شکل ۱۰۹ نگاه کنید). بنابراین $F(t)$ فقط در $t = 0$ مینیمم دارد و اگر $F(0)$ نامنفی باشد، آنگاه به‌ازای هر t ، مقدار $F(t)$ اکیداً مثبت است. ولی بدیهی است که $F(0)$ نامنفی است زیرا

اگر در عبارت بالا فرض کنیم $t = 0$ ، فوراً نتیجه می‌شود.

$$F(0) = 0 - \log 1 = 0$$

بنابراین فقط باقی‌مانده که مشتق $F(t)$ را حساب و ثابت کنیم که این مشتق به‌ازای هر t ، $t \neq 0$ ، با t هم‌علامت است.



شکل ۱۰۹

اگر از $F(t)$ مشتق بگیریم، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} F'(t) &= t \times \frac{(\sum p_i a_i^t)(\sum p_i a_i^t \log^t a_i) - (\sum p_i a_i^t \log a_i)(\sum p_i a_i^t \log a_i)}{(\sum p_i a_i^t)^2} \\ &\quad + (1) \times \frac{\sum p_i a_i^t \log a_i}{\sum p_i a_i^t} - \frac{P_n}{\sum p_i a_i^t} \times \frac{\sum p_i a_i^t \log a_i}{P_n} \\ &= t \times \frac{(\sum p_i a_i^t)(\sum p_i a_i^t \log^t a_i) - (\sum p_i a_i^t \log a_i)^2}{(\sum p_i a_i^t)^2} \end{aligned}$$

بدیهی است که مخرج این کسر مثبت است و، همان‌طور که خواهیم دید، از نابرابری کوشی نتیجه می‌شود که صورتش نیز باید نامنفی باشد. همان‌طور که می‌دانید، نابرابری کوشی دربارهٔ بردارهایی مانند

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

و خودش چنین است

$$|u \cdot v| = |u||v| \cos \theta$$

$$\leq |u||v|$$

که در آن θ زاویهٔ بین دو بردار u و v است. اگر دو طرف این نابرابری را به توان ۲ برسانیم نتیجه می‌شود

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)$$

و در آن برابری برقرار است اگر و تنها اگر $\cos \theta = 1$ ، یعنی اگر و تنها اگر $\frac{u_i}{v_i}$ ها برابر باشند.

اینک به‌ازای

$$u_i = \sqrt{p_i a_i^t}, \quad v_i = \sqrt{p_i a_i^t \log^t a_i}$$

در مورد صورت عبارت $F'(t)$ ، می‌توان نوشت

$$\left(\sum p_i a_i^t \right) \left(\sum p_i a_i^t \log^t a_i \right) - \left(\sum p_i a_i^t \log a_i \right)^2 \geq 0$$

که در آن برابری برقرار است اگر و تنها اگر $\frac{u_i}{v_i}$ برابر باشند. در نتیجه برابری وقتی و فقط وقتی برقرار است که

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \dots = \frac{v_n}{u_n}$$

به عبارت دیگر، با توجه به اینکه $v_i = u_i \log a_i$ شرط بالا معادل است با اینکه

$$\log a_1 = \log a_2 = \dots = \log a_n$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

بنابراین وقتی که همه a ها برابر نیستند، مانند حالتی که با آن مواجهیم، می‌توان نوشت

$$F'(t) = t \times (\text{کسری مثبت})$$

و حکم نهایی، یعنی اینکه به ازای هر t ، $t \neq 0$ ، $F'(t)$ و t هم‌علامت‌اند، به دست می‌آید.

در خاتمه، توجه کنید که نابرابری مشهور میانگین حسابی - میانگین هندسی حالت خاصی از این نتیجه مهم است. چون $0 < -1$ ، پس وقتی که همه a ها برابر نیستند،

$$f(-1) < f(0) < f(1)$$

ولی

$$f(1) = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{P_n}$$

یعنی $f(1)$ برابر است با میانگین حسابی P_n عدد که در آنها a_i ، p_i بار تکرار شده است (و آن را با A نشان می‌دهیم) و همان‌طور که گفتیم، $f(0)$ میانگین هندسی این اعداد است (و آن را با G نشان می‌دهیم) و سرانجام اینکه

$$f(-1) = \frac{P_n}{\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} + \dots + \frac{p_n}{a_n}}$$

یعنی $f(-1)$ میانگین همساز این اعداد است. در نتیجه

$$H \leq G \leq A$$

که در آن برابری برقرار است اگر و تنها اگر همه a ها با هم برابر باشند.

مراجع

1. Mitrinovic, D. S., *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag Heidelberg, 1968, 76-77.
2. G. Polya and G. Szego, *Problems and Theorems in Analysis*, Springer - Verlag, 1972 edition, vol. 1, 69, problem 82.

نمایه موضوعی

۱. ترکیبیات و هندسه ترکیبیاتی
- ۱ تویهای سیاه و سفید در ظرف
- ۲ مکعب و صفحه شطرنج
- ۴ ماتریسی 1987×1987
- ۹ دربارهٔ افراز عددهای صحیح
- ۱۱ نوعی بازی دربارهٔ مقسوم‌علیه‌های عددهای صحیح
- ۱۳ تجزیهٔ مربع
- ۱۴ تجزیهٔ مثلث به مثلثهای متساوی‌الساقین
- ۲۵ میانگین تعداد مسیرها در عددهای صحیح
- ۳۹ ۳ نقطه بین ۴ نقطهٔ صفحه مثلث بسازند
- ۴۲ عددهای صحیح با رقمهای $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ۴۹ دربارهٔ مجموعه‌ای ۱۰ عضوی
- ۶۳ دربارهٔ ۴۴ عدد صحیح که از ۱۲۵ بیشتر نیستند
- ۶۸ میانگین روی جایگشتها
- ۷۳ باز کردن گاوصندوق
- ۷۸ دنباله‌های دودویی به طول ۷
- ۸۴ دنباله‌های حسابی در آرایه‌ای 5×5
- ۸۶ دربارهٔ پاره‌خطهای درونی چندوجهی
- ۹۲ دنباله‌ای از عددهای صحیح که با ۱، ۹، ۸ و ۲ آغاز می‌شود
- ۹۳ آرایه‌ای 5×41 و رنگ‌آمیزی شده
- ۱۱۲ رنگ‌آمیزی عددهای صحیح با ۱۰۰ رنگ
- ۱۱۵ دربارهٔ مثلثهای $P_i P_j P_k$ که شامل نقطهٔ مفروض Q هستند

- ۱۱۷ شماره‌گذاری مثلثها در چندضلعی مثلث بندی شده
 ۱۴۵ دنباله‌ای از حرفهای $\{a, b, c\}$
 ۱۵۱ دربارهٔ ۲- رنگ آمیزی دایره
 ۱۵۶ زیرمجموعه‌ای از $\{1, 2, \dots, 3000\}$ که فاقد k و $2k$ باشد
 ۱۵۸ دربارهٔ افزایی از فضای ۳ بعدی
 ۱۶۸ دربارهٔ برخی از فاصله‌های گنگ و مثلثهایی با مساحت‌های گویا
 ۱۷۷ تقسیم یک سری از ضریبهای دوجمله‌ای به سه بخش
 ۱۹۰ مثلثهای تکرنگ روی ۷ نقطه از فضا
 ۲۰۰ دربارهٔ زبانهای خارجی

۲. جبر، نظریهٔ اعداد، احتمال، حسابان

- ۶ دربارهٔ چندجمله‌ای درجهٔ m با شرط $f(2) \geq 3^n$
 ۸ دربارهٔ میانگین فاصله‌های بدون علامت که برابر با $\frac{1}{p}$ است
 ۱۸ طولانیترین رشته از عددهای صحیح متوالی با مجموع 3^{11}
 ۱۹ دربارهٔ مرتب کردن سر رفتنی
 ۲۱ محاسبه‌ای ناخوشایند
 ۲۳ تنها مقدار مینیمم مجموع S_n از عددهای صحیح
 ۲۹ کوچکترین کران بالای یک دنباله
 ۳۲ احتمال اینکه ۵ انتخاب تصادفی حسابی تشکیل دهند
 ۳۵ دنبالهٔ $\tau(n), \tau(\tau(n)), \dots$
 ۴۶ دنباله‌ای نامتناهی مانند $\{b_i\}$ که در آن (b_m, b_n) ثابت باشد
 ۵۲ مجموعی از بازه‌های مجزا که مجموع طولهایشان برابر با ۱۹۸۸ است
 ۶۲ دربارهٔ $x_i = \pm 1, \sum x_i x_j x_k x_l$
 ۶۳ دربارهٔ عددی اعشاری و نامتناهی: گویا یا گنگ؟
 ۶۵ از ویژگیهای مجموعهٔ $\{2, 5, 13, d\}$
 ۶۶ حاصل ضربی از سینوسها
 ۷۰ دنبالهٔ $\{a_n\}$ که در آن $2^k | a_n$ اگر و تنها اگر $2^k | n$
 ۸۰ دربارهٔ دنباله‌ای از قطارهای باری
 ۸۷ دربارهٔ عاملی از $ax^{17} + bx^{16} + 1$
 ۹۵ دربارهٔ دنبالهٔ $\{[n\sqrt{2}]\}$
 ۱۰۲ دربارهٔ ریشه‌های $x^{n+2} - 2x + 1 = 0$
 ۱۰۶ نوعی سه‌تایی فیثاغورسی
 ۱۲۰ دربارهٔ مجموع توانهای عددهای صحیح
 ۱۲۸ مسأله‌ای جبری، چندگزینهای
 ۱۳۴ نابرابری شامل لگاریتم
 ۱۴۱ معادله‌هایی که ضریبهایشان ریشه‌های آنها هستند

- ۱۴۸ میانگین حاصل ضرب زیرمجموعه‌هایی از عددهای صحیح
 ۱۵۳ نوع خاصی از عددهای مقلوب
 ۱۶۴ دربارهٔ کفها و سقفها
 ۱۷۲ دربارهٔ مربعات کامل در تصاعدهای حسابی
 ۱۸۰ دربارهٔ حاصل ضرب ۵ عدد صحیح متوالی
 ۱۸۴ حل معادلهٔ $3^x = 4 + 7^y \times 5^z$ در عددهای صحیح نامنفی
 ۱۸۶ مسأله‌ای از اردوش دربارهٔ دنباله‌های نامتناهی
 ۱۸۷ مسأله‌ای از اردوش دربارهٔ دنبالهٔ همراهی از عددهای صحیح
 ۱۹۳ دربارهٔ جزء صحیح برخی از ریشه‌های دوم
 ۲۱۰ نابرابری پیچیده از روسیه
 ۲۱۲ دربارهٔ دنبالهٔ $\left\{ \frac{S_b}{b} \right\}$
 ۲۱۴ از ویژگیهای عددهای صحیح دور دایره
 ۲۱۹ نابرابری میانگین توانی

۳. هندسه

- ۳۸ دربارهٔ مینیمم کردن پاره‌خطی در مثلث
 ۴۴ از ویژگیهای سه دایرهٔ هم‌رس
 ۵۰ دربارهٔ دو مثلث که در مرکز دایرهٔ محیطی مشترک‌اند
 ۵۵ دربارهٔ محاطی و محیطی بودن چهارضلعی
 ۵۸ دربارهٔ مربعی که دور تا دور دایرهٔ محاطی مثلث قرار دارد
 ۶۴ از ویژگیهای دو دایره که مماس داخل‌اند
 ۸۹ دربارهٔ مثلث ژرگون مثلث
 ۹۷ نوعی ترسیم هندسی دشوار
 ۱۰۹ از ویژگیهای دو دایرهٔ متقاطع
 ۱۲۲ دربارهٔ بازتاب مثلث نسبت به ضلعهایش
 ۱۲۶ مسأله‌ای هندسی، چندگزینیه‌ای
 ۱۲۹ دربارهٔ مثلث‌بندی مثلث
 ۱۳۱ دربارهٔ ترسیم وتری در دایره
 ۱۳۶ دربارهٔ مثلثهای متساوی‌الساقین قائم‌الزاویهٔ پایی
 ۱۶۱ دربارهٔ شش‌ضلعی مماس بر دایرهٔ محاطی مثلث
 ۱۶۹ دربارهٔ چهارضلعی و مثلثی با مساحت یکسان در دایره
 ۱۷۴ مثلثی که یک زاویهٔ 30° دارد
 ۱۸۲ دربارهٔ مکان هندسی گرانیگاه در فضا
 ۱۹۵ مسأله‌ای از معابد ژاپنی دربارهٔ دایره‌های مماس
 ۲۰۱ دربارهٔ تعامد پاره‌خطهایی در مثلث
 ۲۰۶ از ویژگیهای مثلثهای پایی